MATEMATIKA

ALGEBRA

A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

Tartalomjegyzék

Tárgymutató

1. A matematikai logika elemei

1.1. Az ítéletkalkulus elemei

Értelmezés. Ítéletnek nevezünk egy jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondatot, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
Megjegyzés. Egy ítélet nem lehet egyidőben igaz is és hamis is és az sem lehetséges, hogy igaz se és hamis se legyen.
Értelmezés. Egy ítélethez egyértelműen hozzérendelhetjük az 1 vagy 0 **logikai értéket**: ha az ítélet igaz, akkor logikai értéke 1, ha hamis, akkor logikai értéke 0 (itt az „1” és ”0” szimbólumokat és nem számokat jelölnek).
Jelölés. Az ítéletek jelölésére a $p, q, r, \ldots$ kisbetűket használjuk.

Példa. Ítéletek: „Minden négyzetben van derékszög.”- igaz, logikai értéke 1;
„Egy háromszög szögeinek mértékének összege $110°$.”-hamis, logikai értéke 0;
„Az egyenlő oldalú háromszögben az oldalak kongruensek.”-igaz, logikai értéke 1.

Nem ítéletek: „$x + 3 = 10$”- nem lehet eldönteni, hogy igaz vagy hamis: létezik olyan x érték, amelyre igaz ($x = 7$) és van olyan x is, amelyre hamis (például az $x = 1$);
„Egy háromszögben az oldalak kongruensek.”- az egyenlő oldalú háromszög esetében igaz, minden más esetben hamis.

Ítélet tagadása

Értelmezés. A p ítélet **tagadása** a „non p” ítélet (jelölés: $\neg p$ vagy $\overline{p}$), amely igaz, ha p hamis és hamis, ha p igaz.

Logikai érték- táblázat:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Megjegyzés. A p és $\neg(\neg p)$ ítéletek logikai értéke megegyezik.
Szóbeli közlésben a tagadást általában a „nem” szóval fejezzük ki.

Példa. A p: „Kettő plusz három nagyobb négynél.” igaz ítélet tagadása a
$\neg p$: „Kettő plusz három nem nagyobb négynél.” hamis ítélet.
Matematikailag ezt így írjuk le: p: „$2 + 3 > 4$”, $\neg p$: „$2 + 3 \not> 4$”.

A „Minden kutya fekete.” hamis ítélet tagadása a „Van olyan kutya, amely nem fekete.” igaz állítás.

Ítéletek konjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **konjunkciója** a „p és q” ítélet (jelölés: $p \wedge q$), amely csak akkor igaz, ha mind a p, mind a q igaz (ha p és q közül legalább az egyik hamis, akkor $p \wedge q$ hamis).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a konjunkciót általában az „és” szóval fejezzük ki.

Ítéletek diszjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **diszjunkciója** a „p vagy q” ítélet (jelölés: $p \vee q$), amely csak akkor hamis, ha mind a p, mind a q hamis (ha p és q közül legalább az egyik igaz, akkor $p \vee q$ igaz).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a diszjunkciót általában a „vagy” szóval fejezzük ki.

Értelmezés. A $p, q, r, \ldots$ egyszerű ítéletekből a $\neg, \vee, \wedge$ logikai operátorok véges számú alkalmazásával alkotott új ítéleteket **összetett ítéleteknek** nevezzük.
Megjegyzés. Az ítéletkalkulus azt vizsgálja, hogy egy összetett ítélet logikai értéke hogyan függ az őt alkotó egyszerű ítéletek logikai értékétől.

Ítéletek implikációja

Értelmezés. A p, q ítéletek **implikációján** a $((\neg p) \vee q)$ összetett ítéletet értjük (jelölés: $p \rightarrow q$, „p implikálja q-t”, „p-ből következik q”).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

A táblázatból kitűnik, hogy $p \rightarrow q$ akkor és csakis akkor hamis, ha p igaz és q hamis.
Megjegyzés. Szóbeli közlésben a $p \rightarrow q$ implikációt általában a „ha p, akkor q” módon fejezzük ki. A $p \rightarrow q$ implikációban p neve **feltevés**, a q neve **következmény**.

Példa. A p: „A 2 egy páros szám.”, q:„A Föld gömb alakú.” ítéletek esetén

- $p \to q$: „Ha a 2 egy páros szám, akkor a Föld gömb alakú.” hamis ítélet, mert a feltevés igaz és a következmény hamis;
- $q \to p$: „Ha a Föld gömb alakú, akkor 2 páros szám.” igaz ítélet.

Ítéletek ekvivalenciája

Értelmezés. A p, q ítéletek **ekvivalenciáján** a $(p \to q) \wedge (q \to p)$ összetett ítéletet értjük (jelölés: $p \leftrightarrow q$, „p ekvivalens q-val”). A táblázatból kitűnik, hogy $p \leftrightarrow q$ akkor és csakis akkor igaz, ha p és q egyidejűleg igaz vagy egyidejűleg hamis.

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a $p \leftrightarrow q$ implikációt általában a „p akkor és csakis akkor, ha q” módon fejezzük ki.

Logikai formulák

Értelmezés. A p, q, r betűkből (amelyek ítéleteket helyettesítenek) a $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ logikai összekötő szimbólumokat felhasználva **logikai képleteket (formulákat)** állíthatunk elő.
Példa. Logikai képletek: $p \vee (q \to (\neg p))$, $(p \vee q) \wedge (p \vee (\neg q))$.
Értelmezés. Egy olyan logikai formulát, amely a benne szereplő ítéletek logikai értékétől függetlenül mindig igaz ítéletet ad, **azonosan igaz formulának** vagy **tautológiának** nevezzük.
Értelmezés. Két logikai formulát, amelyek ugyanazon $p, q, \ldots$ betűkből állnak és amelyekben a $p, q, \ldots$ betűket tetszőleges ítéletekkel helyettesítve a két formula logikai értéke megegyezik, **ekvivalensnek** nevezünk.
Jelölés. Az α és β formulák ekvivalenciáját így jelöljük: $\alpha \equiv \beta$ vagy $\alpha \Leftrightarrow \beta$.
Két logikai formula ekvivalenciáját a logikai értékek táblázatával mutatjuk ki.

Feladat. *Igazoljuk, hogy* $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$*.*
M. A táblázat oszlopaiba p, q mellett rendre beírjuk a $p \to q$, $\neg q$, $\neg p$, $\neg q \to \neg p$ ítéleteket is. Mivel a két megjelölt oszlop megegyezik, a formulák ekvivalensek.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

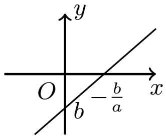
5. Sajátos függvények, egyenletek

5.1. Az elsőfokú függvény

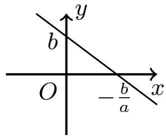
Értelmezés. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ alakú függvényt **elsőfokú függvénynek** nevezünk.

Az elsőfokú függvény grafikus képe egy egyenes.

Ha $a > 0$:



Ha $a < 0$:



Monotonitás-és előjeltáblázat

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
ha $a > 0$, $f(x)$	$-\infty$	$- \nearrow -$	0	$+ \nearrow +$	$+\infty$
ha $a < 0$, $f(x)$	$+\infty$	$+ \searrow +$	0	$- \searrow -$	$-\infty$

Feladat. *Legyen f egy elsőfokú függvény. Igazoljuk, hogy az $f \circ f$ függvény szigorúan növekvő!*
M. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ akkor

$$(f \circ f)(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b)$$

egy elsőfokú függvény. Mivel x együtthatója $\left(a^2\right)$ pozitív, f növekvő.

Feladat. *Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény szigorúan növekvő legyen, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3$!*
M. Az f elsőfokú függvény pontosan akkor szigorúan növekvő, ha x együtthatója szigorúan pozitív, azaz $3 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Feladat. *Határozzuk meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek grafikus képe átmegy az $A(2, 7)$ és $B(-3, -18)$ pontokon!*
M. Legyen a keresett függvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$$A, B \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 7, f(-3) = -18 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b & = 7 \\ -3a + b & = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 5 \\ b & = -3 \end{cases}.$$

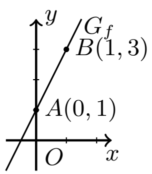
Tehát a keresett függvény: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$.

Az elsőfokú függvény tulajdonságai

Értelmezés	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
Képhalmaz	$Imf = \mathbb{R}$
Metszéspontok a tengelyekkel	$G_f \cap Oy = \{(0, b)\}$ $G_f \cap Ox = \left\{\left(-\frac{b}{a}, 0\right)\right\}$
Periodicitás	nem periodikus
Paritás	ha $b = 0$, f páratlan, szimmetriaközéppont: O ha $b \neq 0$, f nem páros, nem páratlan
Folytonosság	folytonos görbe
Aszimptoták	$\pm\infty$-ben ferde aszimptota: $y = ax + b$
Korlátosság	nem korlátos
Monotonitás	ha $a > 0$, f szigorúan növekvő $\mathbb{R}$-n ha $a < 0$, f szigorúan csökkenő $\mathbb{R}$-n
Előjel	ha $a > 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ ha $a < 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$
Bijektivitás	bijektív
Inverz függvény	$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

Feladat. *Ábrázoljuk az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = 2x + 1$ *függvényt.*

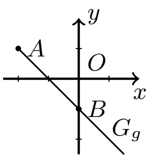
M. f egy elsőfokú függvény, így grafikus képe egy egyenes.



Az egyenes megrajzolásához elegendő két tetszőleges pontját megrajzolni. $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, ezért ábrázoljuk az $A(0, 1)$ és $B(1, 3)$ pontokat, majd megrajzoljuk a rajtuk átmenő egyenest.

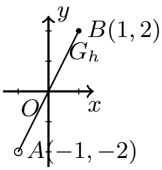
Feladat. *Ábrázoljuk a* $g : [-2, \infty) \to \mathbb{R}$*,* $g(x) = -x - 1$ *függvényt.*

M. g egy elsőfokú függvény leszűkítése a $[-2, \infty)$ intervallumra, így grafikus képe egy egyenes azon része, ahol az abszcissza ≥ 2, vagyis egy félegyenes.



A félegyenes megrajzolásához elegendő a kezdőpontját ($x = -2$) és még egy tetszőleges pontját megrajzolni. $g(-2) = 1$, $g(0) = -1$, ezért ábrázoljuk az $A(-2, 1)$ és $B(0, -1)$ pontokat, majd megrajzoljuk a rajtuk átmenő $[AB$ félegyenest.

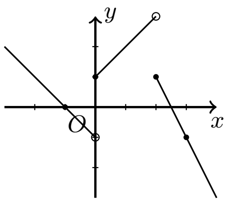
Feladat. *Ábrázoljuk a $h : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x$ függvényt.*
M. h egy elsőfokú függvény leszűkítése a $(-1, 1]$ intervallumra, így grafikus képe egy egyenes azon része, ahol az abszcissza az értelmezési tartomány eleme, vagyis egy balról nyílt, jobbról zárt szakasz.



A szakasz megrajzolásához elegendő a két végpontját ($x = -1$ és $x = 1$) megrajzolni. $h(-1) = -2$, $h(1) = 2$, ezért ábrázoljuk az $A(-1, -2)$ és $B(1, 2)$ pontokat, majd megrajzoljuk az $(AB]$ szakaszt (az $x = -1$ nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért A nem eleme a grafikus képnek).

Feladat. *Ábrázoljuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x-1 & , x < 0 \\ x+1 & , x \in [0,2) \\ -2x+5 & , x \geq 2 \end{cases}$ függvényt.*

M. Az f egy-egy leszűkített elsőfokú függvénnyel van értelmezve a $(-\infty, 0)$, $[0, 2)$ és $[2, \infty)$ intervallumokon, így a grafikus kép két félegyenesből és egy szakaszból áll. Ezek végpontjainak illetve a két félegyenes egy-egy pontjának a koordinátáit a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

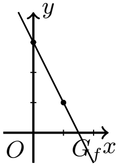


x	$-\infty$	-1	$0)$	$[0$	$2)$	$[2$	3	∞
$f(x)$	$+\infty$	0	-1	1	3	1	-1	$-\infty$

5.2. Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek

Értelmezés. Elsőfokú egyenletnek nevezünk egy $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ alakú egyenletet.
Az egyenlet megoldása az $x = -\frac{b}{a}$ szám.
Megjegyzés. Gyakran találkozunk olyan egyenletekkel, melyek nem ilyen alakúak, de ekvivalens átalakításokkal erre az alakra hozhatók. Ilyen esetekben első lépésként meghatározzuk az eredeti egyenletben szereplő kifejezések D értelmezési tartományát.

Feladat. *Oldjuk meg két módszerrel a $-2x + 3 = 0$ egyenletet.*
M. I. (grafikus) megoldás. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$ függvényt.



Ekkor az f grafikus képe és az Ox tengely metszéspontjának abszcisszája megadja az egyenlet gyökét. Ábrázolva a függvény grafikus képét ($f(0) = 3$, $f(1) = 1$) leolvashatjuk a metszéspont (közelítő) koordinátáit: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy $x = \frac{3}{2}$ valóban megoldás.

II. (algebrai) megoldás.

$$-2x+3=0 \overset{|-3}{\Leftrightarrow} -2x=-3 \overset{|:(-2)}{\Leftrightarrow} x=\frac{-3}{-2}, \text{ tehát } M=\left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Feladat. *Oldjuk meg a* $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{3}{2x-2}$ *egyenletet.*

M. A törtek akkor értelmezettek, ha $x-1\neq 0$ és $2x-2\neq 0$, azaz $x\neq 1$. Tehát $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Felhasználva, hogy egy aránypárban a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával, $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{3}{2x-2} \Rightarrow 2x-2=3x-3 \overset{|-2x+3}{\Leftrightarrow} x=1$.

A kapott érték nem eleme a D értelmezési tartománynak, így $M=\emptyset$ (erről a próba elvégzésével is meggyőződhetünk- az $x=1$ értékre az „$\frac{1}{0}=\frac{1}{0}$” egyenlőséghez jutunk, ami- bár igaznak tűnik- értelmetlen).

Ha az $ax+b=0,\ x\in D$ egyenlet paramétert is tartalmaz, akkor az egyenletet *tárgyaljuk*, azaz meghatározzuk, hogy az egyenletenek a paraméter mely értékeire van megoldása és ezekben az esetekben megoldjuk az egyenletet:

- ha $a\neq 0$, akkor a megoldáshalmaz $M=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$;
- ha $a=0$ és
  - ha $b=0$, akkor minden $x\in D$ megoldás: $M=D$;
  - ha $b\neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása: $M=\emptyset$.

Feladat. *Tárgyaljuk és oldjuk meg az* $mx+2=2x+2m,\ m\in\mathbb{R}$ *egyenletet.*

M. Átrendezéssel: $mx-2x=2m-2 \Leftrightarrow (m-2)x=2m-2$. Mivel az egyenlet paraméter is tartalmaz, tárgyalnunk kell:

- ha $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$, akkor a megoldás $x=\dfrac{2m-2}{m-2}$;
- ha $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, akkor az egyenlet: $0\cdot x=2$, azaz $M=\emptyset$.

Értelmezés. Elsőfokú egyenlőtlenségnek nevezünk egy $ax+b\geq 0$ ($ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b<0$), $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ alakú egyenlőtlenséget. Az $ax+b\geq 0$ egyenlőtlenség megoldásakor figyelembe kell venni az a előjelét:

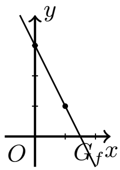
- ha $a>0$, akkor $M=\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$,
- ha $a<0$, akkor $M=\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$.

Feladat. *Oldjuk meg két módszerrel a* $-2x+3<0$ *egyenlőtlenséget.*

M. I. (algebrai) megoldás:

$$-2x+3<0 \overset{|-3}{\Leftrightarrow} -2x<-3 \overset{|:(-2)<0}{\Leftrightarrow} x>\frac{-3}{-2}, \text{ tehát } M=\left(\frac{3}{2},\infty\right).$$

II. (grafikus) megoldás: Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+3$ függvényt.



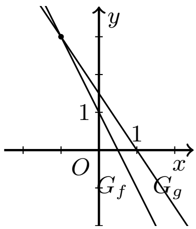
Ekkor az egyenlőtlenség megoldásait a grafikus kép Ox alatti pontjainak az abszcisszái adják. Ábrázolva a függvény grafikus képét ($f(0) = 3$, $f(1) = 1$) leolvashatjuk a megoldáshalmazt: $M = (1{,}5; \infty)$.

Elsőfokú, két ismeretlenes egyenletrendszer megoldása

Az $\begin{cases} a_1x + b_1 & = x \\ a_2x + b_2 & = y \end{cases}$ egyenletrendszer megoldását az $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1x + b_1$ és $f_2(x) = a_2x + b_2$ függvények grafikus képeinek metszéspontjának koordinátái adják.

Feladat. *Oldjuk meg a* $\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ 3x + 2y & = 3 \end{cases}$ *egyenletrendszert!*

M. A két egyenletből kifejezve az y-t, $y = 1 - 2x$ illetve $y = \dfrac{3 - 3x}{2}$, ezért tekintjük

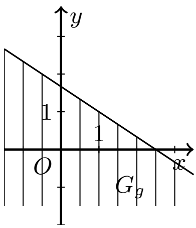


az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$ elsőfokú függvényeket. Ábrázolva a két függvény grafikus képét, leolvasható, hogy a $(-1, 3)$ pontban metszik egymást.
Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ($x = -1$, $y = 3$) valóban megoldása a rendszernek.

Elsőfokú, két ismeretlenes egyenlőtlenség

Az $ax + by + c \geq 0$ ($b \neq 0$) egyenlőtlenséget teljesítő (x, y) koordinátájú pontok az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-c - ax}{b}$ függvény grafikus képe (egy egyenes) által meghatározott egyik félsíkot alkotják.

Feladat. *Oldjuk meg a* $2x + 3y - 5 < 0$ *egyenlőtlenséget!*
M. Ábrázolva a $2x + 3y - 5 = 0$ egyenletű egyenest (vagyis az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,



$f(x) = y = \dfrac{5 - 2x}{3}$ függvény grafikus képét), az egyenlőtlenség megoldáshalmaza az egyenes által meghatározott egyik félsík. Mivel $O(0, 0)$ kielégíti az egyenlőtlenséget, a megoldáshalmaz az a félsík, amely tartalmazza az O origót.