

MATEMATIKA

ALGEBRA



A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

© 2016 PRESSTERN SOLUTIONS

Tartalomjegyzék

1. A matematikai logika elemei	1
1.1. Az ítéletkalkulus elemei	1
1.2. A predikátum-kalkulus elemei	4
1.3. Halmazok	5
1.4. A matematikai indukció elve	7
2. Valós számok	9
2.1. Valós számhalmazok	9
2.2. Hatványok	12
2.3. Az n . gyök	14
2.4. Logaritmusok	16
3. Sorozatok, haladványok	18
3.1. Sorozatok	18
3.2. Számítani haladványok	20
3.3. Mértani haladványok	22
4. Függvények	24
4.1. A függvény fogalma	24
4.2. Műveletek számfüggvényekkel	26
4.3. Függvények tulajdonságai	31
4.4. Bijektív függvények	36
4.5. Függvény grafikus képe	41
4.6. A tulajdonságok mértani jelentése	43
5. Sajátos függvények, egyenletek	48
5.1. Az elsőfokú függvény	48
5.2. Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek	50
5.3. Másodfokú függvény	53
5.4. Másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek	56
5.5. Természetes kitevőjű hatványfüggvények	60
5.6. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények	62
5.7. Gyökfüggvények	64

5.8. Irracionális egyenletek	66
5.9. Az exponenciális függvény	68
5.10. Exponenciális egyenletek	69
5.11. A logaritmus függvény	72
5.12. Logaritmosos egyenletek	74
5.13. A szinusz függvény	79
5.14. Az árkusz-szinusz függvény	80
5.15. A koszinusz függvény	83
5.16. Az árkusz-koszinusz függvény	84
5.17. A tangens függvény	87
5.18. Az árkusz-tangens függvény	88
5.19. A kotangens függvény	90
5.20. Az árkusz-kotangens függvény	91
6. Komplex számok	93
6.1. A komplex számok halmaza	93
6.2. Komplex szám algebrai alakja	94
6.3. Geometriai megfeleltetés	97
6.4. Trigonometriai alak	99
6.5. Komplex szám n -ed rendű gyökei	102
6.6. Binom és bikvadratikus egyenletek	103
7. Kombinatorika	104
7.1. A kombinatorika alapszabályai	104
7.2. Permutációk	107
7.3. Az S_n szimmetrikus csoport	108
7.4. Variációk	111
7.5. Kombinációk	112
7.6. Newton binomiális képlete	113
8. Pénzügyi matematika	114
8.1. A pénzügyi matematika elemei	114
8.2. A matematikai statisztika elemei	116
8.3. Valószínűségszámítás	118
9. Mátrixok és determinánsok	121
9.1. Mátrixok	121
9.2. Determinánsok	125
9.3. Determinánsok alkalmazásai a mértanban	129
9.4. Mátrix inverze	130
9.5. Mátrix rangja	131
10. Lineáris egyenletrendszerek	134
11. Algebrai struktúrák	139
11.1. Műveletek	139

11.2. Csoportok	148
11.3. Részcsoportok	151
11.4. Csoportmorfizmusok	152
11.5. Gyűrűk és testek	154
12. Polinomok	157
12.1. Polinomgyűrű	157
12.2. Polinom algebrai alakja	157

Tárgymutató

- Abel-csoport, 148
- abszolút érték, 11
- abszolút gyakoriság, 117
- additív jelölés, 139
- affixum, 97
- aldetermináns, 126, 131
- algebra alaptétele, 161
- algebrai komplementum, 126
- algebrai struktúra, 148
- argumentum, 99
- asszociatív művelet, 141
- aszimptota, 45
- automorfizmus, 152
- azonosan igaz formula, 3
- állandó hányados, 22
- állandó különbség, 20
- átlag, 117

- Bézout tétele, 160
- belső művelet, 139
- bijektív függvény, 39
- bikvadratikus egyenlet, 103
- binom egyenlet, 103
- binomiális együtthatók, 112

- Cayley-tábla, 139
- ciklikus csoport, 152
- ciklikus részcsoport, 152
- Cramer-szabály, 135
- csökkenő sorozat, 19
- csoport, 148
 - homomorfizmus, 152
 - izomorfizmus, 152
 - morfizmus, 152
 - rendje, 148

- de Morgan-képletek, 6
- derékszögű koordináta-rendszer, 41
- Descartes-szorzat, 6
- Descartes-féle koordináta-rendszer, 41
- determináns, 125
 - harmadrendű, 125
 - kifejtése, 126
 - másodrendű, 125
 - minora, 131
 - Vandermonde, 128
- Dirichlet-függvény, 32
- diztributivitás, 147
- doménium, 24

- e , 16
- egész rész, 11
- egész számok halmaza, 9
- egyenlőtlenség
 - elsőfokú, 51
 - logaritmusos, 78
 - másodfokú, 59
- egyenlet
 - elsőfokú, 50
 - exponenciális, 69
 - irracionális, 66
 - logaritmusos, 74
 - másodfokú, 56
 - diszkrimináns, 56

gyökök előjele, 57
megoldóképlet, 56
Viéte-összefüggések, 57
egységelemes gyűrű, 154
egységgyökök, 102
egységgyökök csoportja, 152
egzisztenciális kvantor, 4
ekvivalens logikai formulák, 3
elem rendje, 148
elemi esemény, 118
ellentett elem, 146
ellentett geometriai képe, 97
elsőfokú egyenletrendszer, 52
endomorfizmus, 152
esemény, 118
 biztos esemény, 118
 események egyesítése, 119
 események metszete, 119
 lehetetlen esemény, 118
 tagadása, 119
eseménytér, 118
értelmezési tartomány, 24
értékkészlet, 24
függvény, 24
 árkusz-koszinusz, 84
 árkusz-kotangens, 91
 árkusz-színusz, 80
 árkusz-tangens, 88
 elsőfokú, 48
 exponenciális, 68
 gyökfüggvény, 64
 hatványfüggvény, 60, 62
 identikus, 30
 invertálható, 30, 40
 inverze, 30, 40
 koszínusz, 83
 kotangens, 90
 logaritmus, 72
 másodfokú, 53
 színusz, 79

tangens, 87
függvény
 grafikonja, 41
 grafikus képe, 41
 csökkenő, 34
 injektív, 36
 képhalmaza, 31
 konvex, konkáv, 33
 korlátos, 34
 leszűkítése, 24
 monoton, 34
 növekvő, 34
 páros,páratlan, 32
 periodikus, 32
 szürjektív, 38
függvények
 hányadosa, 29
 különbsége, 27
 összege, 26
 összetevése, 29
 szorzata, 28
félcsoport, 148
fődetermináns, 136
főminor, 136
főperiódus, 32
fadiagram, 105
feltevés, 2
Gauss-d'Alembert tétel, 161
generátorelem, 152
gyök, 14
gyök multiplicitása, 162
gyöktelenítés, 15
gyűrű, 154
 egységei, 154
 egységelemes, 154
 izomorfizmus, 156
 kommutatív, 154
 morfizmus, 156
haladvány

mértani, 22
összegképlet, 23
általános tag képlete, 23
számítani, 20
összegképlet, 21
általános tag képlete, 21
halmaz, 5
rendezett, 107
halmazok
Descartes-szorzata, 6
egyenlősége, 5
egyesítése, 5
különbsége, 5
komplementerhalmaz, 6
metszete, 5
hatványfüggvény, 62
hatványozás, 12
Horner-séma, 160

\mathbb{I} , 9
identikus függvény, 30
identikus permutáció, 109
 $\text{Im } f$, 31
imaginárius egység, 94
imaginárius tengely, 97
indukált művelet, 151
integritás-tartomány, 155
invertálható függvény, 30, 40
inverz elem, 146
inverz függvény, 30, 40
inverz permutáció, 109
inverzió, 110
irracionális számok halmaza, 9
irreducibilis polinom, 158
ismérv, 116
izomorf csoportok, 152
ítélet, 1
ítéletek diszjunkciója, 2
ítéletek ekvivalenciája, 3
ítéletek implikációja, 2
ítéletek konjunkciója, 2
ítéletek tagadása, 1
következmény, 2
kamat, 115
egyszerű, 115
kamatos, 115
kamatláb, 115
kifejtés általános tagja, 113
klasszikus valószínűség, 120
Klein-csoport, 149
kodoménium, 24
kombináció, 112
kommutatív csoport, 148
kommutatív gyűrű, 154
kommutatív művelet, 142
kommutatív test, 156
komplementerhalmaz, 6
komplex szám, 93
abszolút értéke, 95
algebrai alakja, 94
argumentuma, 99
geometriai képe, 97
 i , 94
imaginárius része, 94
 $\text{Im } z$, 94
konjugáltja, 95
modulusza, 95
négyzetgyöke, 96
redukált argumentuma, 99
 $\text{Re } z$, 94
trigonometrikus alakja, 100
valós részének együtthatója, 94
valós része, 94
komplex számok halmaza, 93
konjugált geometriai képe, 97
korlátos sorozat, 19
Kronecker-Capelli-tétel, 137
lekötött összeg, 115
lineáris egyenletrendszer, 134
bővített mátrixa, 134

Cramer-rendszer, 135
 Cramer-szabály, 135
 determinánsa, 134
 együtthatók, 134
 együtthatók mátrixa, 134
 főegyenletek, 136
 főismeretlenek, 136
 határozatlan, 134
 határozott, 134
 inkompatibilis, 134
 ismeretlenek, 134
 karakterisztikus determináns, 136
 kompatibilis, 134
 mátrixa, 134
 megoldása, 134
 mellékegyenletek, 136
 mellékismeretlenek, 136
 nem összeférhető, 134
 lineáris egyenletrendszer
 összeférhető, 134
 szabadtagok, 134
 tárgyalása, 137
 logaritmus, 16
 logikai érték, 1
 logikai formulák ekvivalenciája, 3
 logikai formula, 3
 mátrix, 121
 összeadása mátrixszal, 122
 adjungáltja, 130
 egységmátrix, 123
 ellentettje, 122
 hatványozása, 124
 invertálható, 130
 inverze, 130
 négyzetes, 121
 nullmátrix, 122
 rangja, 131
 szinguláris, 130
 szorzása mátrixszal, 123
 szorzása számmal, 121
 transzponáltja, 124
 mátrixok
 egyenlősége, 121
 különbsége, 122
 módusz, 117
 művelet
 asszociatív, 141
 disztributív, 147
 elem szimmetrikusa, 146
 ellentett elem, 146
 inverzy elem, 146
 kommutatív, 142
 semleges elem, 143
 szimmetrizálható elem, 146
 művelettábla, 139
 maradékos osztás tétele, 10
 maradékosztályok halmaza, 141
 matematikai indukció, 7
 medián, 117
 modulo n , 141
 modulusz, 11
 geometriai értelmezése, 97
 Moivre-képlet, 101
 monoid, 148
 monoton sorozat, 19
 multiplikatív jelölés, 139
 \mathbb{N} , 9
 növekvő sorozat, 19
 négyzetes mátrix, 121
 Newton binomiális képlete, 113
 oermutáció
 identikus, 109
 összeférhetetlen események, 119
 páratlan permutáció, 111
 páros permutáció, 111
 parabola, 53
 csúcsa, 54
 szimmetriatengelye, 54

Pascal-háromszög, 112
periódus, 32
permutáció, 107, 108
 előjele, 111
 hatványozása, 109
 inverze, 109
 inverzió, 110
 páratlan, 111
 páros, 111
 szorzás, 108
 transzpozíció, 110
permutációcsoport, 149
poláris argumentum, 99
poláris sugár, 99
polinom
 algebrai alak, 157
 behelyettesítési érték, 158
 főtagja, 159
 fokszáma, 157
 gyöke, 161
 irreducibilis, 158
 maradékos osztás tétele, 158
 oszthatóság, 158
 reducibilis, 158
polinomfüggvény, 158
polinomgyűrű, 157
populáció, 116
predikátum, 4
primszám, 10

\mathbb{Q} , 9

\mathbb{R} , 9
részcsoport, 151
részgyűrű, 155
részhalmaz, 5
részttest, 156
racionális számok halmaza, 9
reducibilis polinom, 158
relatív gyakoriság, 117
rendezett halmaz, 107

Rouché-tétel, 137

semleges elem, 143
 baloldali, 143
 jobboldali, 143
sorozat, 18
 csökkenő, 19
 korlátos, 19
 monoton, 19
 növekvő, 19
 szigorúan csökkenő, 19
 szigorúan monoton, 19
 szigorúan növekvő, 19
stabil részhalmaz, 139
statisztikai egyed, 116
statisztikai minta, 116
statisztikai sokaság, 116
számegyenes, 12
számfüggvény, 24
számsorozat, 18
százalékos arány, 114
szórás, 117
szórásnégyzet, 117
szegélyezés, 132
szigorúan csökkenő sorozat, 19
szigorúan monoton sorozat, 19
szigorúan növekvő sorozat, 19
szimmetrikus, 146
szimmetrikus csoport, 149
szimmetrizálható elem, 146
szitaformula, 104

törtrész, 11
tautológia, 3
természetes logaritmus alapja, 16
természetes számok halmaza, 9
test, 156
 izomorfizmus, 156
 kommutatív, 156
 morfizmus, 156
tiszta szakaszos tizedes tört, 10

transzpozíció, 110
trigonometrikus alak, 100

univerzális kvantor, 4

véges csoport, 148
véges tizedes tört, 10
valódi részcsoport, 151
valós számok halmaza, 9
valós tengely, 97
valószínűség, 119
Vandermonde-determináns, 128
variáció, 111
vegyes szakaszos tizedes tört, 10
Viéte-összefüggések, 57, 162

\mathbb{Z} , 9

zárt részhalmaz, 139
zérusosztó, 155

1. A matematikai logika elemei

1.1. Az ítéletkalkulus elemei

Értelmezés. Ítéletnek nevezünk egy jól meghatározott dologra vonatkozó kijelentő mondatot, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Megjegyzés. Egy ítélet nem lehet egyidőben igaz is és hamis is és az sem lehetséges, hogy igaz se és hamis se legyen.

Értelmezés. Egy ítélethez egyértelműen hozzárendelhetjük az 1 vagy 0 **logikai értéket**: ha az ítélet igaz, akkor logikai értéke 1, ha hamis, akkor logikai értéke 0 (itt az „1” és „0” szimbólumokat és nem számokat jelölnek).

Jelölés. Az ítéletek jelölésére a p, q, r, \dots kisbetűket használjuk.

Példa. Ítéletek: „Minden négyzetben van derékszög.”- igaz, logikai értéke 1;
„Egy háromszög szögeinek mértékének összege 110° .”-hamis, logikai értéke 0;
„Az egyenlő oldalú háromszögben az oldalak kongruensek.”-igaz, logikai értéke 1.

Nem ítéletek: „ $x + 3 = 10$ ”- nem lehet eldönteni, hogy igaz vagy hamis: létezik olyan x érték, amelyre igaz ($x = 7$) és van olyan x is, amelyre hamis (például az $x = 1$);
„Egy háromszögben az oldalak kongruensek.”- az egyenlő oldalú háromszög esetében igaz, minden más esetben hamis.

Ítélet tagadása

Értelmezés. A p ítélet **tagadása** a „non p ” ítélet (jelölés: $\neg p$ vagy \bar{p}), amely igaz, ha p hamis és hamis, ha p igaz.

Logikai érték- táblázat:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Megjegyzés. A p és $\neg(\neg p)$ ítéletek logikai értéke megegyezik.

Szóbeli közlésben a tagadást általában a „nem” szóval fejezzük ki.

Példa. A p : „Kettő plusz három nagyobb négynél.” igaz ítélet tagadása a $\neg p$: „Kettő plusz három nem nagyobb négynél.” hamis ítélet.
Matematikailag ezt így írjuk le: p : „ $2 + 3 > 4$ ”, $\neg p$: „ $2 + 3 \not> 4$ ”.

A „Minden kutya fekete.” hamis ítélet tagadása a „Van olyan kutya, amely nem fekete.” igaz állítás.

Ítéletek konjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **konjunkciója** a „ p és q ” ítélet (jelölés: $p \wedge q$),

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

amely csak akkor igaz, ha mind a p , mind a q igaz (ha p és q közül legalább az egyik hamis, akkor $p \wedge q$ hamis).

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a konjunkciót általában az „és” szóval fejezzük ki.

Ítéletek diszjunkciója

Értelmezés. A p és q ítéletek **diszjunkciója** a „ p vagy q ” ítélet (jelölés: $p \vee q$),

Logikai érték-táblázat:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

amely csak akkor hamis, ha mind a p , mind a q hamis (ha p és q közül legalább az egyik igaz, akkor $p \vee q$ igaz).

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a diszjunkciót általában a „vagy” szóval fejezzük ki.

Értelmezés. A p, q, r, \dots egyszerű ítéletekből a \neg, \vee, \wedge logikai operátorok véges számú alkalmazásával alkotott új ítéleteket **összetett ítéleteknek** nevezzük.

Megjegyzés. Az ítéletkalkulus azt vizsgálja, hogy egy összetett ítélet logikai értéke hogyan függ az őt alkotó egyszerű ítéletek logikai értékétől.

Ítéletek implikációja

Értelmezés. A p, q ítéletek **implikációján** a $((\neg p) \vee q)$ összetett ítéletet értjük (jelölés: $p \rightarrow q$, „ p implikálja q -t”, „ p -ből következik q ”).

Logikai érték-táblázat:

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

A táblázatból kitétnünk, hogy $p \rightarrow q$ akkor és csak akkor hamis, ha p igaz és q hamis.

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a $p \rightarrow q$ implikációt általában a „ha p , akkor q ” módon fejezzük ki. A $p \rightarrow q$ implikációban p neve **feltevés**, a q neve **következmény**.

Példa. A p : „A 2 egy páros szám.”, q : „A Föld gömb alakú.” ítéletek esetén

- $p \rightarrow q$: „Ha a 2 egy páros szám, akkor a Föld gömb alakú.” hamis ítélet, mert a feltevés igaz és a következmény hamis;
- $q \rightarrow p$: „Ha a Föld gömb alakú, akkor 2 páros szám.” igaz ítélet.

Ítéletek ekvivalenciája

Értelmezés. A p, q ítéletek **ekvivalenciáján** a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ összetett ítéletet értjük (jelölés: $p \leftrightarrow q$, „ p ekvivalens q -val”). A táblázatból kitűnik, hogy

Logikai érték-táblázat:				
p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$p \leftrightarrow q$ akkor és csak akkor igaz, ha p és q egyidejűleg igaz vagy egyidejűleg hamis.

Megjegyzés. Szóbeli közlésben a $p \leftrightarrow q$ implikációt általában a „ p akkor és csak akkor, ha q ” módon fejezzük ki.

Logikai formulák

Értelmezés. A p, q, r betűkből (amelyek ítéleteket helyettesítenek) a $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ logikai összekötő szimbólumokat felhasználva **logikai képleteket (formulákat)** állíthatunk elő.

Példa. Logikai képletek: $p \vee (q \rightarrow (\neg p)), (p \vee q) \wedge (p \vee (\neg q))$.

Értelmezés. Egy olyan logikai formulát, amely a benne szereplő ítéletek logikai értékétől függetlenül mindig igaz ítéletet ad, **azonosan igaz formulának** vagy **tautológiának** nevezzük.

Értelmezés. Két logikai formulát, amelyek ugyanazon p, q, \dots betűkből állnak és amelyekben a p, q, \dots betűket tetszőleges ítéletekkel helyettesítve a két formula logikai értéke megegyezik, **ekvivalensnek** nevezzük.

Jelölés. Az α és β formulák ekvivalenciáját így jelöljük: $\alpha \equiv \beta$ vagy $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

Két logikai formula ekvivalenciáját a logikai értékek táblázatával mutatjuk ki.

Feladat. Igazoljuk, hogy $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$.

M. A táblázat oszlopaiba p, q mellett rendre beírjuk a $p \rightarrow q, \neg q, \neg p, \neg q \rightarrow \neg p$ ítéleteket is. Mivel a két megjelölt oszlop megegyezik, a formulák ekvivalensek.

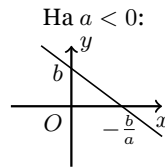
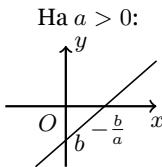
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

5. Sajátos függvények, egyenletek

5.1. Az elsőfokú függvény

Értelmezés. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ alakú függvényt **elsőfokú függvénynek** nevezünk.

Az elsőfokú függvény grafikus képe egy egyenes.



Monotonitás-és előjel táblázat

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ha $a > 0$, $f(x)$	$-\infty$	$- \nearrow -$	$0 \quad + \nearrow + \quad +\infty$
ha $a < 0$, $f(x)$	$+\infty$	$+ \searrow +$	$0 \quad - \searrow - \quad -\infty$

Feladat. Legyen f egy elsőfokú függvény. Igazoljuk, hogy az $f \circ f$ függvény szigorúan növekvő!

M. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ akkor

$$(f \circ f)(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b)$$

egy elsőfokú függvény. Mivel x együtthatója (a^2) pozitív, f növekvő.

Feladat. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény szigorúan növekvő legyen, ahol $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3$!

M. Az f elsőfokú függvény pontosan akkor szigorúan növekvő, ha x együtthatója szigorúan pozitív, azaz $3 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Feladat. Határozzuk meg azt az elsőfokú függvényt, amelynek grafikus képe átmege az $A(2, 7)$ és $B(-3, -18)$ pontokon!

M. Legyen a keresett függvény $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

$$A, B \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 7, f(-3) = -18 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ -3a + b = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases} .$$

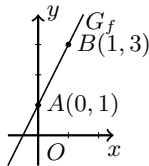
Tehát a keresett függvény: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$.

Az elsőfokú függvény tulajdonságai

Értelmezés	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Képhalmaz	$Imf = \mathbb{R}$
Metszéspontok a tengelyekkel	$G_f \cap Oy = \{(0, b)\}$ $G_f \cap Ox = \{(-\frac{b}{a}, 0)\}$
Periodicitás	nem periodikus
Paritás	ha $b = 0$, f páratlan, szimmetriaközéppont: O ha $b \neq 0$, f nem páros, nem páratlan
Folytonosság	folytonos görbe
Aszimptoták	$\pm\infty$ -ben ferde aszimptota: $y = ax + b$
Korlátosság	nem korlátos
Monotonitás	ha $a > 0$, f szigorúan növekvő \mathbb{R} -n ha $a < 0$, f szigorúan csökkenő \mathbb{R} -n
Előjel	ha $a > 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{b}{a}, \infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ ha $a < 0$, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{b}{a}]$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$
Bijektivitás	bijektív
Inverz függvény	$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

Feladat. Ábrázoljuk az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ függvényt.

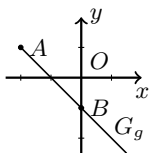
M. f egy elsőfokú függvény, így grafikus képe egy egyenes.



Az egyenes megrajzolásához elegendő két tetszőleges pontját megrajzolni. $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, ezért ábrázoljuk az $A(0, 1)$ és $B(1, 3)$ pontokat, majd megrajzoljuk a rajtuk átmenő egyenest.

Feladat. Ábrázoljuk a $g : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x - 1$ függvényt.

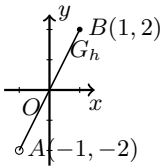
M. g egy elsőfokú függvény leszűkítése a $[-2, \infty)$ intervallumra, így grafikus képe egy egyenes azon része, ahol az abszcissa ≥ 2 , vagyis egy félegyenes.



A félegyenes megrajzolásához elegendő a kezdőpontját ($x = -2$) és még egy tetszőleges pontját megrajzolni. $g(-2) = 1$, $g(0) = -1$, ezért ábrázoljuk az $A(-2, 1)$ és $B(0, -1)$ pontokat, majd megrajzoljuk a rajtuk átmenő $[AB$ félegyenest.

Feladat. Ábrázoljuk a $h : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x$ függvényt.

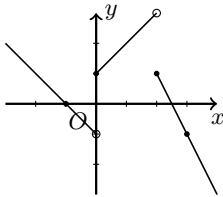
M. h egy elsőfokú függvény leszűkítése a $(-1, 1]$ intervallumra, így grafikus képe egy egyenes azon része, ahol az abszcissza az értelmezési tartomány eleme, vagyis egy balról nyílt, jobbról zárt szakasz.



A szakasz megrajzolásához elegendő a két végpontját ($x = -1$ és $x = 1$) megrajzolni. $h(-1) = -2$, $h(1) = 2$, ezért ábrázoljuk az $A(-1, -2)$ és $B(1, 2)$ pontokat, majd megrajzoljuk az $[AB]$ szakaszt (az $x = -1$ nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért A nem eleme a grafikus képnek).

Feladat. Ábrázoljuk az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x - 1 & , x < 0 \\ x + 1 & , x \in [0, 2) \\ -2x + 5 & , x \geq 2 \end{cases}$ függvényt.

M. Az f egy-egy leszűkített elsőfokú függvényvel van értelmezve a $(-\infty, 0)$, $[0, 2)$ és $[2, \infty)$ intervallumokon, így a grafikus kép két félegyenesből és egy szakaszból áll. Ezek végpontjainak illetve a két félegyenes egy-egy pontjának a koordinátáit a következő táblázatban foglalhatjuk össze:



x	$-\infty$	-1	0	$[0, 2)$	$[2, 3$	∞
$f(x)$	$+\infty$	0	-1	1	3	1
						$-\infty$

5.2. Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek

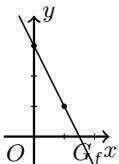
Értelmezés. Elsőfokú egyenletnek nevezzük egy $ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ alakú egyenletet.

Az egyenlet megoldása az $x = -\frac{b}{a}$ szám.

Megjegyzés. Gyakran találkozunk olyan egyenletekkel, melyek nem ilyen alakúak, de ekvivalens átalakításokkal erre az alakra hozhatók. Ilyen esetekben első lépésként meghatározzuk az eredeti egyenletben szereplő kifejezések D értelmezési tartományát.

Feladat. Oldjuk meg két módszerrel a $-2x + 3 = 0$ egyenletet.

M. I. (grafikus) megoldás. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$ függvényt.



Ekkor az f grafikus képe és az Ox tengely metszéspontjának abszcisszája megadja az egyenlet gyökét. Ábrázolva a függvény grafikus képét ($f(0) = 3, f(1) = 1$) leolvashatjuk a metszéspont (közvetítő) koordinátáit: $(\frac{3}{2}, 0)$. Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy $x = \frac{3}{2}$ valóban megoldás.

II. (algebrai) megoldás.

$$-2x + 3 = 0 \stackrel{|-3}{\Leftrightarrow} -2x = -3 \stackrel{|:(-2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{-3}{-2}, \text{ tehát } M = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

Feladat. Oldjuk meg a $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x-2}$ egyenletet.

M. A törtek akkor értelmezettek, ha $x - 1 \neq 0$ és $2x - 2 \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Tehát $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Felhasználva, hogy egy aránypárban a kültagok szorzata egyenlő a beltagok szorzatával, $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x-2} \Rightarrow 2x - 2 = 3x - 3 \stackrel{|-2x+3}{\Leftrightarrow} x = 1$.

A kapott érték nem eleme a D értelmezési tartománynak, így $M = \emptyset$ (erről a próba elvégzésével is meggyőződhetünk- az $x = 1$ értékre az „ $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$ ” egyenlőséghez jutunk, ami- bár igaznak tűnik- értelmetlen).

Ha az $ax + b = 0$, $x \in D$ egyenlet paramétert is tartalmaz, akkor az egyenletet *tárgyaljuk*, azaz meghatározzuk, hogy az egyenletnek a paraméter mely értékeire van megoldása és ezekben az esetekben megoldjuk az egyenletet:

- ha $a \neq 0$, akkor a megoldáshalmaz $M = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$;
- ha $a = 0$ és
 - ha $b = 0$, akkor minden $x \in D$ megoldás: $M = D$;
 - ha $b \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása: $M = \emptyset$.

Feladat. Tárgyaljuk és oldjuk meg az $mx + 2 = 2x + 2m$, $m \in \mathbb{R}$ egyenletet.

M. Átrendezéssel: $mx - 2x = 2m - 2 \Leftrightarrow (m - 2)x = 2m - 2$. Mivel az egyenlet paraméter is tartalmaz, tárgyalnunk kell:

- ha $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, akkor a megoldás $x = \frac{2m - 2}{m - 2}$;
- ha $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, akkor az egyenlet: $0 \cdot x = 2$, azaz $M = \emptyset$.

Értelmezés. Elsőfokú egyenlőtlenségnek nevezzük egy $ax + b \geq 0$

($ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b < 0$), $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ alakú egyenlőtlenséget.

Az $ax + b \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásakor figyelembe kell venni az a előjelét:

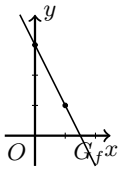
- ha $a > 0$, akkor $M = \left[-\frac{b}{a}, \infty \right)$,
- ha $a < 0$, akkor $M = \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right]$.

Feladat. Oldjuk meg két módszerrel a $-2x + 3 < 0$ egyenlőtlenséget.

M. I. (algebrai) megoldás:

$$-2x + 3 < 0 \stackrel{|-3}{\Leftrightarrow} -2x < -3 \stackrel{|:(-2)<0}{\Leftrightarrow} x > \frac{-3}{-2}, \text{ tehát } M = \left(\frac{3}{2}, \infty \right).$$

II. (grafikus) megoldás: Tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$ függvényt.



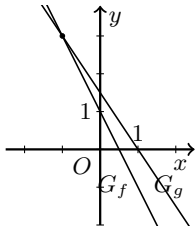
Ekkor az egyenlőtlenség megoldásait a grafikus kép Ox alatti pontjainak az abszcisszái adják. Ábrázolva a függvény grafikus képét ($f(0) = 3$, $f(1) = 1$) leolvashatjuk a megoldáshalmazt: $M = (1, 5; \infty)$.

Elsőfokú, két ismeretlenes egyenletrendszer megoldása

Az $\begin{cases} a_1x + b_1 = x \\ a_2x + b_2 = y \end{cases}$ egyenletrendszer megoldását az $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = a_1x + b_1$ és $f_2(x) = a_2x + b_2$ függvények grafikus képeinek metszéspontjának koordinátái adják.

Feladat. Oldjuk meg a $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ egyenletrendszert!

M. A két egyenletről kifejezve az y -t, $y = 1 - 2x$ illetve $y = \frac{3 - 3x}{2}$, ezért tekintjük



az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ elsőfokú függvényeket. Ábrázolva a két függvény grafikus képét, leolvasható, hogy a $(-1, 3)$ pontban metszik egymást.

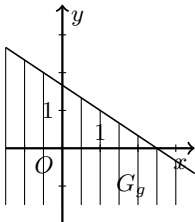
Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $(x = -1, y = 3)$ valóban megoldása a rendszernek.

Elsőfokú, két ismeretlenes egyenlőtlenség

Az $ax + by + c \geq 0$ ($b \neq 0$) egyenlőtlenséget teljesítő (x, y) koordinátájú pontok az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-c - ax}{b}$ függvény grafikus képe (egy egyenes) által meghatározott egyik félsíkot alkotják.

Feladat. Oldjuk meg a $2x + 3y - 5 < 0$ egyenlőtlenséget!

M. Ábrázolva a $2x + 3y - 5 = 0$ egyenletű egyenest (vagyis az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,



$f(x) = y = \frac{5 - 2x}{3}$ függvény grafikus képét), az egyenlőtlenség megoldáshalmaza az egyenes által meghatározott egyik félsík. Mivel $O(0, 0)$ kielégíti az egyenlőtlenséget, a megoldáshalmaz az a félsík, amely tartalmazza az O origót.