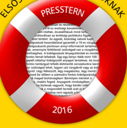
MATEMATIKA

GEOMETRIA ÉS MATEMATIKAI ANALÍZIS

ELSŐSEGÉLY KIT ISKOLÁSOKNAK



A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

Tartalomjegyzék

Tárgymutató

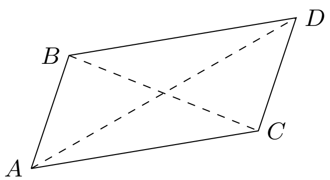
1. Vektorok

1.1. Irányított szakaszok. Vektorok

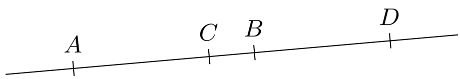
Irányított szakaszok

Értelmezés. Az (A, B) rendezett pontpárt **irányított szakasznak** nevezzük és így jelöljük: $\overline{AB}$.
Értelmezés. Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ irányított szakaszokat **ekvipolenseknek** nevezzük (jelölés: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$), ha az $[AD]$ és $[BC]$ szakaszok felezőpontjai egybeesnek.
Megjegyzés. Ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor az $\overline{AB}$ szakaszt párhuzamos eltolással a $\overline{CD}$ szakaszra lehet helyezni.
Tulajdonság. Az irányított szakaszok halmazán az ekvipolencia egy *ekvivalencia-reláció*, azaz

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (*reflexív*),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (*szimmetrikus*),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ és $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, akkor $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (*tranzitív*).



$\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ pontosan akkor ekvipolensek, ha $ABDC$ egy paralelogramma vagy az A, B, C, D pontok kollineárisak és az $[AD]$, $[BC]$ felezőpontja megegyezik.



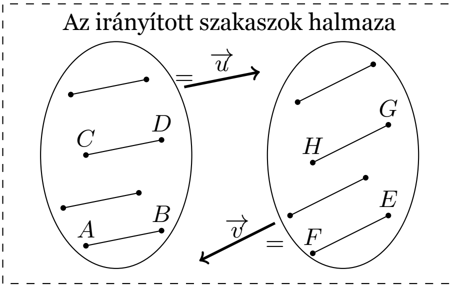
Vektorok

Értelmezés. Egy adott irányított szakasszal ekvipolens irányított szakaszok halmazát **vektornak** nevezzük.
Jelölés. Az $\overline{AB}$ irányított szakasz által meghatározott vektort $\overrightarrow{AB}$-vel (vagy egy kisbetűvel) jelöljük:

$$\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} |\, \overline{CD} \sim \overline{AB}\}.$$

Megjegyzés. Ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Az $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ jelöléssel az $\overline{AB}$ (vagy a $\overline{CD}$) az $\overrightarrow{u}$ egy **reprezentánsa**.
Értelmezés. Az $\overrightarrow{u}$ **hossza (modulusza)** az őt reprezentáló irányított szakaszok közös hosszával egyenlő és $|\overrightarrow{u}|$-val jelöljük.
Értelmezés. A nulla hosszúságú $\overrightarrow{AA}$ vektort **nullvektornak** nevezzük.

Értelmezés. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok **egyenlőek** (jelölés: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), ha az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ irányított szakaszok ekvipolensek.
Megjegyzés. Két vektor akkor egyenlő, ha irányuk megegyezik (tartóegyeneseik párhuzamosak), hosszuk egyenlő és ugyanaz az irányításuk.
Tétel. (*Adott kezdőpontú reprezentáns létezése*) Ha adott az $\overrightarrow{u}$ vektor és egy tetszőleges M pont, akkor létezik egyetlen olyan M' pont, amelyre $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$.
Következmény. Az egyértelműség alapján, ha $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, akkor $A = B$.



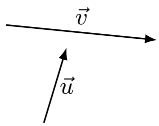
A mellékelt ábrán
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \ldots$,
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \ldots$,
$\overline{CD}$ az $\overrightarrow{u}$ egy reprezentánsa,
$\overline{EF}$ a $\overrightarrow{v}$ egy reprezentánsa,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

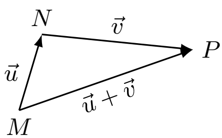
1.2. Műveletek vektorokkal

Vektorok összeadása

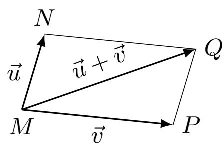
Az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ vektorok **összegét** a következőképpen szerkesztjük meg.

- (*Háromszög-szabály*): egy tetszőleges M pontból kiindulva megszerkesztjük az $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$ majd az $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{v}$ vektorokat. Ekkor az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ összege az $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MP}$ vektor.
- (*Paralelogramma-szabály*): ha $\vec{u}$ és $\vec{v}$ nem kollineárisak, egy tetszőleges M pontból kiindulva megszerkesztjük az $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$ és az $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{v}$ vektorokat, majd az $MNQP$ paralelogrammát. Ekkor az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ összege az $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MQ}$ vektor.





Háromszög-szabály



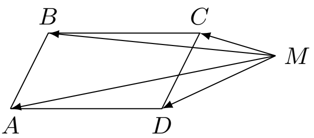
Paralelogramma-szabály

A vektorok összeadásának tulajdonságai

Értelmezés. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor **ellentétes vektora** a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ vektor.
Tulajdonság. A vektorok összeadásának tulajdonságai ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tetszőleges vektorok):

- *asszociatív*: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- *kommutatív*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- a nullvektor $\left(\vec{0}\right)$ az összeadás *semleges eleme*: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
- minden $\vec{a}$ vektornak van ellentettje $(-\vec{a})$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

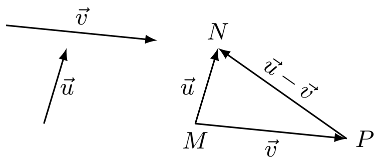
Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ paralelogramma síkjának bármely M pontja esetén $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.*
M. Az $ABCD$ paralelogrammában $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$.



$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \\
&= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \\
&= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \\
&= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.
\end{aligned}$$

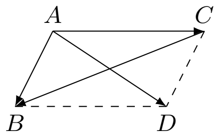
Vektorok kivonása

Az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok **különbségén** az $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ vektort értjük és a következőképpen szerkesztjük meg: egy tetszőleges M pontból kiindulva felvesszük az $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ és $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$ vektorokat. Ekkor $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{PN}$.



Tetszőleges M, N, P pontok esetén
$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$.

Feladat. *Az ABC háromszögben az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektorok modulusza egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű!*
M. Az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ megszerkesztése érdekében megrajzoljuk az $ABDC$ paralelogrammát: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, így $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$.



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, így $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = CB$.
$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Rightarrow AD = BC$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma egy téglalap. Tehát $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$.

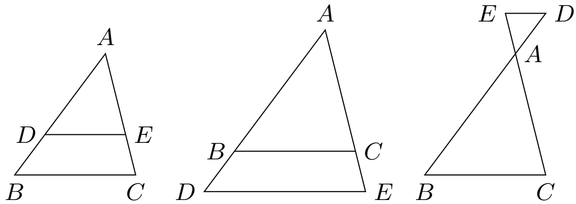
1.5. Párhuzamosság, összefutás, kollinearitás

Tétel. Legyen A, B, C, D négy nem kollineáris pont. Az AB és CD egyenesek pontosan akkor párhuzamosak, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$.

Tétel. (*Thálész tétele*) Az ABC háromszög valamely oldalával húzott párhuzamos a másik két oldalon arányos szakaszokat határoz meg: ha $DE||BC$, $D \in AB$, $E \in AC$, akkor $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.

Következmény. A tétel feltételei mellett $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{EC}{AC}$.

Tétel. (*Thálész tételének fordítottja*) Ha a D és E pontok az ABC háromszög AB és AC oldalát arányos szakaszokra osztják, akkor $DE||BC$.



A háromszög szögfelezőinek tulajdonságai

Tétel. (Szögfelező tétele) Ha $(AD$ az ABC háromszög $\widehat{BAC}$ szögének szögfelezője, $D \in (BC)$, akkor $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Tétel. A háromszögbe írt kör kör középpontja a háromszög szögfelezőinek I metszéspontja.

Tétel. Ha O a sík egy tetszőleges pontja, a háromszögbe írt kör középpontjának helyzetvektorát az $\overrightarrow{OI} = \dfrac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ képlet adja meg, ahol $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Kollinearitás

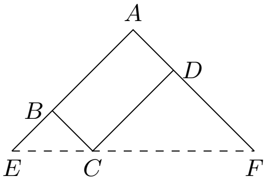
Tétel. Az A, B, C pontok pontosan akkor helyezkednek el egy egyenesen, ha létezik olyan α valós szám, amelyre $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$.

Tétel. Az A, B, C pontok pontosan akkor helyezkednek el egy egyenesen, ha létezik olyan α valós szám, amelyre bármely O pont esetén

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}.$$

Feladat. *Az $ABCD$ paralelogramma oldalain vegyük fel az E és F pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$. Igazoljuk, hogy C, E, F kollineárisak.*

M. Az $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ feltétel alapján $\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{EB}$ (lásd az ábrát), így E az $\overline{AB}$ irányított szakaszt $\lambda = 3$ arányban osztja. Kezdőpontnak a C pontot választva, a helyzetvektor képlete alapján $\overrightarrow{CE} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}}{1-3} = \dfrac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CB}}{-2} = \dfrac{2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}}{2}$.



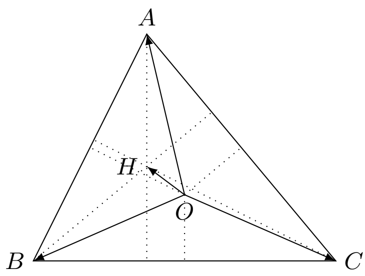
Hasonlóan, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{FA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FD}$, azaz F az $\overline{AD}$ irányított szakaszt $\lambda = \frac{3}{2}$ arányban osztja.

$\overrightarrow{CF} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}}{1 - \frac{3}{2}} = -2\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{CB} = -2 \cdot \dfrac{2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}}{2} = -2\overrightarrow{CE}$, azaz E, C, F kollineárisak.

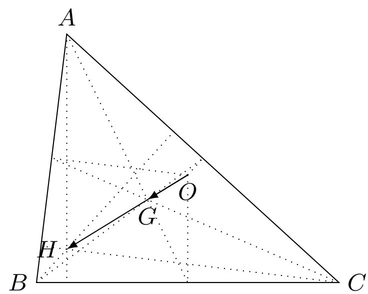
Az ABC háromszögben jelölje O a háromszög köré írt kör középpontját, G a háromszög súlypontját, H a háromszög magasságpontját (a magasságvonalak metszéspontját).

Tétel. (*Sylvester tétele*) Az ABC háromszögben $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Tétel. Az ABC háromszögben az O, G, H pontok egy egyenesen helyezkednek el, melynek neve **a háromszög Euler-egyenese** és $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.



Sylvester tétele



2. Analitikus geometria

Derékszögű koordináta-rendszer

A síkban tekintsük az egymása merőleges xx' és yy' egyeneseket, amelyek az O pontban metszik egymást és amelyeken kijelöltünk egy-egy pozitív irányt.
Értelmezés. Az (xOx', yOy') rendszert **derékszögű koorináta-rendszernek** vagy **Descartes-féle koordináta-rendszernek** nevezzük. Az O pont neve **origó**. Az $[Ox$, $[Oy$ félegyenesek a **pozitív féltengelyek**, $[Ox'$, $[Oy'$ a **negatív féltengelyek**.
Jelölés. Az (xOx', yOy') koordináta-rendszert (xOy)-nal jelöljük. Az $[Ox$ illetve az $[Oy$ féltengelyek egységvektorait $\vec{i}$, $\vec{j}$-vel jelöljük.

Descartes-féle koordináták

Legyen M egy tetszőleges pont az xOy koordináta-rendszer síkjában. Jelölje x_M az M pontnak az Ox-tengelyre eső vetületének koordinátáját, y_M az M pontnak az Oy-tengelyre eső vetületének koordinátáját.
Értelmezés. Az x_M számot az M pont **abszcisszájának**, az y_M pontot az M **ordinátájának** nevezzük. Az (x_M, y_M) számpárt az M **koordinátáinak** nevezzük.

Ezzel egyenértékű a következő értelmezés.
Értelmezés. Az M pont $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ helytevketorát az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ vektorok szerint felbontva $\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j}$, ahol $x_M, y_M \in \mathbb{R}$. Az (x_M, y_M) számpárt az M pont **koordinátáinak** nevezzük.
Jelölés. Ez utóbbi értelmezés alapján (formálisan) $\overrightarrow{r_M} = (x_M, y_M)$.

Két pont távolsága

Az $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontok távolságát a
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
képlet adja meg.

Feladat. *Határozzuk meg az AOB háromszög kerületét, ahol $A(3,4)$ és $B(12,5)$.*
M. $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $OB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, $AB = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{82}$, így $K_{AOB_\triangle} = 18 + \sqrt{82}$.

Feladat. *Határozzuk meg az* $m \in \mathbb{R}$ *számot úgy, hogy az* $A(2;m)$ *és* $B(m;-2)$ *pontok távolsága* 4 *legyen!*
M. $AB = \sqrt{(m-2)^2 + (-2-m)^2} = 4 \Leftrightarrow 2m^2 + 8 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Műveletek kötött vektorokkal

Legyen $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1)$ és $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2)$ két vektor és λ egy valós szám.
Tulajdonság. (*Két vektor egyenlősége*) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow (a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2)$.
Tulajdonság. (*Két vektor összege*) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.
Tulajdonság. (*Vektor szorzata valós számmal*) $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot b_1)$.
Tulajdonság. (*Két vektor skaláris szorzata*) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \in \mathbb{R}$.
Tulajdonság. Az $\overrightarrow{u}$ vektor hossza $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$.
Következmény. Két vektor skaláris szorzatának értelmezéséből
$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$
Következmény. $\overrightarrow{u}$ pontosan akkor merőleges $\overrightarrow{v}$-re, ha $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.
Tétel. Az $\overrightarrow{u}$ és $\overrightarrow{v}$ vektorok pontosan akkor párhuzamosak, ha $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0$ vagy $a_1 = a_2 = 0$ vagy $b_1 = b_2 = 0$.

Feladat. *Adottak az* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ *és* $\overrightarrow{u} = 6\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ *vektorok. Határozzuk meg a* $p, r \in \mathbb{R}$ *számokat úgy, hogy fennálljon az* $\overrightarrow{u} = p\overrightarrow{a} + r\overrightarrow{b}$ *egyenlőség!*
M. $\overrightarrow{a} = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,-1)$, $\overrightarrow{b} = (6,2)$. $p\overrightarrow{a} + r\overrightarrow{b} = p \cdot (1,1) + r \cdot (1,-1) = (p,p) + (r,-r) = (p+r, p-r) = (6,2) \Leftrightarrow \begin{cases} p + r &= 6 \\ p - r &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow p = 4, r = 2.$

Feladat. *Számítsuk ki:* $(2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}) \cdot (3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j})$.
M. A skaláris szorzás értelmezéséből $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \|\overrightarrow{i}\| \cdot \|\overrightarrow{i}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$, $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$, $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \|\overrightarrow{i}\| \cdot \|\overrightarrow{j}\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$, így $(2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}) \cdot (3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}) = 6\overrightarrow{i}^2 - 8\overrightarrow{i}j + 15\overrightarrow{j}\overrightarrow{i} - 20\overrightarrow{j}^2 = 6 - 20 = -14$.

Másképp: formálisan írhatjuk, hogy
$$(2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}) \cdot (3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}) = (2,5) \cdot (3,-4) = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = -14.$$

Feladat. *Határozzuk meg az* $m \in \mathbb{R}$ *azon értékét, amelyre az* $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$ *és* $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + (2m-1)\overrightarrow{j}$ *vektorok merőlegesek egymásra!*
M. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 + (-5) \cdot (2m-1) = 0 \Leftrightarrow 8 - 10m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{13}{10}$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy az* $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$ *és* $v = 3\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$ *vektorok tompaszöget zárnak be.*
M. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (4,-5) \cdot (3,7) = 12 - 35 = -23 < 0$, így a két vektor által bezárt szög

koszinusza negatív, azaz a szög tompaszög.

Feladat. *Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ és $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + (a+4)\overrightarrow{j}$ vektorok párhuzamosak legyenek!*

M. $\overrightarrow{u} || \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{a+4} \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2, a_2 = -6.$

Feladat. *Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $O(0,0)$, $A(2,1)$ és $B(-2,1)$ pontok. Határozzuk meg az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok által bezárt szög koszinuszát!*

M. $\overrightarrow{OA} = (2,1)$, $\overrightarrow{OB} = (-2,1)$, $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{5}$, $\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{5}$; $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \Leftrightarrow$
$\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos(\widehat{AOB}) = -3 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\widehat{AOB}) = -3 \Leftrightarrow \cos(\widehat{AOB}) = -\dfrac{3}{5}.$

Legyen $\overrightarrow{r_A} = (x_A, y_A)$, $\overrightarrow{r_B} = (x_B, y_B)$, $\overrightarrow{r_C} = (x_C, y_C)$.
Tétel. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.
Tétel. Ha $M \in (AB)$ úgy, hogy $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, akkor

$$x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1-k} \text{ és } y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1-k}.$$

Következmény. Az $[AB]$ szakasz M felezőpontjának koordinátái

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Következmény. Az ABC háromszög G súlypontjának koordinátái

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Feladat. *Legyen G az ABC háromszög súlypontja. Az A, B és G helyzetvektorai $\overrightarrow{r_A} = 4\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{r_B} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ és $\overrightarrow{r_G} = 4\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Határozzuk meg a C pont helyzetvektorát!*

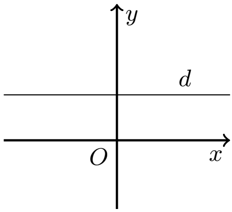
M. $(4,4) = \left(\dfrac{4+2+x_C}{3}, \dfrac{7-1+y_C}{3}\right) \Leftrightarrow x_C = 6, y_C = 6 \Leftrightarrow C(6,6).$

Egyenes iránytényezője

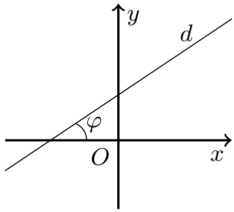
Értelmezés. Legyen d egy egyenes, mely nem párhuzamos az Oy-tengellyel. A d egyenes **iránytényezője** a d-nek az Ox-tengellyel bezárt szögének tangense: $m = \operatorname{tg} \varphi$, ahol $\varphi \in [0°, 180°] \setminus \{90°\}$ (az Oy-nal párhuzamos egyeneseknek nincs iránytényezőjük).
Tétel. Az $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontokon átmenő egyenes iránytényezője

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

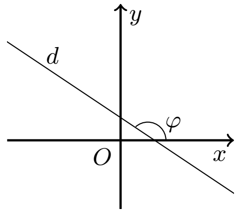
Tétel. A $d: \ ax + by + c = 0, b \neq 0$ egyenletű egyenes iránytényezője $m_d = -\dfrac{a}{b}$.
Tétel. Az $y = mx + n$ egyenletű egyenes iránytényezője m.



$\varphi = 0^\circ, m = 0$



$\varphi \in (0^\circ, 90^\circ), m > 0$



$\varphi \in (90^\circ, 180^\circ), m < 0$

Két egyenes szöge

Legyen m_1 a d_1, m_2 a d_2 egyenes iránytényezője ($d_1 \neq d_2$, $d_1 \nparallel Oy$, $d_2 \nparallel Oy$).

Tétel. A d_1 és d_2 egyenesek akkor és csakis akkor párhuzamosak, ha $m_1 = m_2$.

Tétel. A d_1 és d_2 egyenesek akkor és csakis akkor merőlegesek, ha $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Tétel. A d_1 és d_2 egyenesek által bezárt szög tangense

$$\operatorname{tg}\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}.$$

Egyenes egyenlete

Értelmezés. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ vagy $b \neq 0$. Azon (x, y) koordinátájú pontok, amelyekre $ax + by + c = 0$, egy d egyenesen helyezkednek el, melyet az $ax + by + c = 0$ egyenletű egyenesnek nevezünk és így jelölünk: $d: \ ax + by + c = 0$ (egyenes **általános egyenlete**).

Tétel. Az Oy-tengelyt a $(0, n)$ pontban metsző, m iránytényezőjű egyenes egyenlete $y = mx + n$ (egyenes **explicit egyenlete**).

Tétel. Az $A(x_A, y_A)$ ponton áthaladó és m iránytényezőjű egyenes egyenlete

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

Tétel. Az $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ha $x_A \neq x_B$ és $x = x_A$, ha $x_A = x_B$.

Megjegyzés. A fenti összefüggés $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$ alakba is írható.

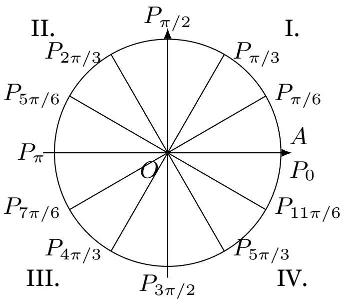
Következmény. Azon egyenes egyenlete, amely a tengelyeket az $(a, 0)$ és $(0, b)$ pontokban metszi, $(a, b \neq 0)$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$.

3. Trigonometria

3.1. A trigonometria elemei

Szög-mértékegységek

Értelmezés. Egy kör félkerületének és sugarának aránya állandó és $\pi \approx 3{,}1415$-tel egyenlő.
Értelmezés. A kör sugarával megegyező hosszúságú körívhez tartozó középponti szög mértéke 1 **radián.**
Megjegyzés. Egy szögnek fokban illetve radiánban való mértéke közt fennáll az $\dfrac{\alpha}{x_r} = \dfrac{180}{\pi}$ összefüggés, ahol α a szög fokban kifejezett, x_r a szög radiánban kifejezett mértéke.

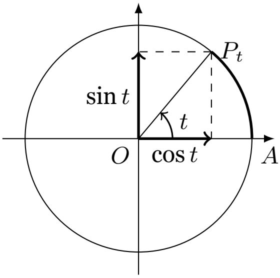


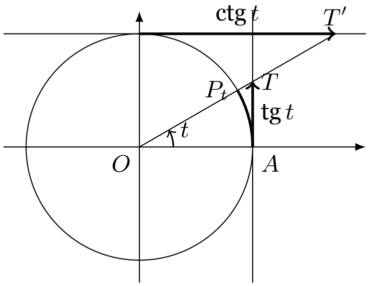
A trigonometrikus kör

Értelmezés. Adott egy xOy derékszögű koordináta-rendszer. Az O középpontú, egységsugarú kört, amelyen kijelöltünk egy pozitív körbejárási irányt (az óramutató járásával ellentétes irányt), **trigonometrikus körnek** nevezzük.
Jelölés. Legyen $t \in \mathbb{R}$ egy szám. Ekkor egyetlen olyan P_t-vel jelölt pont van a trigonometriai körön, amely $m(\widehat{AOP_t}) = t$.

Szinusz és koszinusz

Legyen t egy valós szám és P_t a hozzátartozó pont a körön.
Értelmezés. A P_t pont ordinátáját a t valós szám **szinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\sin t$.
Értelmezés. A P_t pont abszcisszáját a t valós szám **koszinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\cos t$.





Tangens és kotangens

Értelmezés. Az $x = 1$ egyenletű függőleges egyenest **tangens-tengelynek**, az $y = 1$ egyenletű vízszintes egyenest pedig **kotangens-tengelynek** nevezzük.
Értelmezés. Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, P_t a t-nek megfelelő pont és T az OP_t egyenes és a tangens-tengely metszéspontja, akkor T ordinátáját t **tangensének** nevezzük és így jelöljük: $\operatorname{tg} t$.
Értelmezés. Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, P_t a t-nek megfelelő pont és T' az OP_t egyenes és a kotangens-tengely metszéspontja, akkor T' abszcisszáját t **kotangensének** nevezzük és így jelöljük: $\operatorname{ctg} t$.

Fontosabb értékek

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\vert$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} x$	$\vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\vert$

Visszavezetés az első negyedbe

$x \in N_2$	$x \in N_3$	$x \in N_4$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$	$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$	$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$	$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - \pi)$	$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(2\pi - x)$
$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(\pi - x)$	$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x - \pi)$	$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(2\pi - x)$

A trigonometrikus függvények előjele

x	0	N_1	$\frac{\pi}{2}$	N_2	π	N_3	$\frac{3\pi}{2}$	N_4	2π
$\sin x$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$+$	$+\vert-$	$-$	0	$+$	$+\vert-$	$-$	0
$\operatorname{ctg} x$	$\vert+$	$+$	0	$-$	$-\vert+$	$+$	0	$-$	$-\vert$

A trigonometrikus függvények monotonitása

x	0	N_1	$\frac{\pi}{2}$	N_2	π	N_3	$\frac{3\pi}{2}$	N_4	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\nearrow$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$\nearrow$	0
$\operatorname{ctg} x$	$\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$_{-\infty}\vert$

Alapösszefüggések

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (*a trigonometria alapképlete*)		$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

3. Függvényhatárértékek

3.1. Függvény határértéke

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ függvény **határértéke** az $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontban $l \in \overline{\mathbb{R}}$, ha az l bármely V_l környezete esetén létezik az x_0 olyan U_{x_0} környezete, amelyre $\forall x \in U^*_{x_0} \cap D$ esetén $f(x) \in V_l$.
Jelölés. Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény határértéke az $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pontban $l \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor ezt így jelöljük: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
Tétel. *(A határérték Heine féle értelmezése)* Legyen $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Egyenértékűek a következő állítások:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$,
- $\forall (x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ sorozat $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ függvénynek nincs határértéke az $x_0 = 0$ pontban!*
M. Tekintsük az $(x_n)_{n \geq 1}$ és $(x'_n)_{n \geq 1}$ sorozatokat, ahol $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$.
Ekkor $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x'_n = 0$ és

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin n\pi = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n \to \infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1,$$

így f-nek nincs határértéke 0-ban.

Határérték az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban

Értelmezés. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $f(x) > \varepsilon$.
Értelmezés. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty$*!*

M. Igazoljuk, hogy $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta > 0$ úgy, hogy ha $|x| < \delta$, $x \neq 0$, akkor $f(x) > \varepsilon$.

$$f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x^2 - x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right).$$

A $\delta = \min\left\{\left|\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right|, \left|\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right|\right\}$ választással tehát $|x| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.

Határérték $+\infty$-ben

Értelmezés. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$ akkor $f(x) > \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$, akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Határérték $-\infty$-ben

Értelmezés. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x < -\delta(\varepsilon)$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x < -\delta(\varepsilon)$ akkor $f(x) > \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x < -\delta(\varepsilon)$, akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Jobb és bal oldali határérték

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ függvény **bal oldali határértéke** az $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontban $l \in \overline{\mathbb{R}}$, ha az l bármely V_l környezete esetén létezik az x_0 olyan U_{x_0} környezete, amelyre $\forall x \in U^*_{x_0} \cap D$, $x < x_0$ esetén $f(x) \in V_l$.

Jelölés. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ vagy $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)$.

Tétel. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = l \Leftrightarrow$
$\forall (x_n)_{n\geq 1}, x_n \in D, x_n < x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ sorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Megjegyzés. Hasonlóan értelmezhető a jobb oldali határérték is.

Tétel. Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvénynek a D halmaz x_0 torlódási pontjában akkor és csakis akkor van határértéke, ha van bal és jobb oldali határértéke és ezek egyenlők.

3.2. Határértékekkel végzett műveletek

Összeg, szorzat határértéke

Tétel. Ha az f, g függvényeknek van határértéke x_0-ban és a határértékek összege illetve szorzata értelmezett, akkor az $f+g$ illetve $f \cdot g$ függvénynek is van határértéke x_0-ban és

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Határozatlan esetek: $\infty + (-\infty)$, $(-\infty)+\infty$, illetve $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$.

Hányados határértéke

Tétel. Ha az f, g függvényeknek van határértéke x_0-ban és a határértékek hányadosa értelmezett, akkor az $\frac{f}{g}$ függvénynek is van határértéke x_0-ban és

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Határozatlan esetek: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Hatvány határértéke

Tétel. Ha az f, g függvényeknek van határértéke x_0-ban és a határértékek hatványa értelmezett, akkor az f^g függvénynek is van határértéke x_0-ban és

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Határozatlan esetek: 0^0, 1^∞, ∞^0.

Összetett függvény határértéke

Tétel. Ha $g : D \to E$, $f : E \to \mathbb{R}$, x_0 a D torlódási pontja, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_0$, $g(x) \neq l_0$, ha $x \neq x_0$ és $\lim\limits_{u\to l_0} f(u) = l$, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke x_0-ban és $\lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x) = l$.

Példa. Ha $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, akkor $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \sin f(x) = \sin \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sin l$.

5.4. Elemi függvények deriváltjai

A függvény	A függvény deriváltja	Deriválhatósági tartomány
$f(x) = c,\, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^a,\, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ax^{a-1}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \log_a x,\, {\scriptstyle a>0, \atop a\neq 1}$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$f(x) = a^x,\, {\scriptstyle a>0, \atop a\neq 1}$	$f'(x) = a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$