

MATEMATIKA

GEOMETRIA ÉS MATEMATIKAI ANALÍZIS



A 2016-OS ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEINEK
MEGFELELŐ OKTATÁSI SEGÉDANYAG

© 2016 PRESSTERN SOLUTIONS

Tartalomjegyzék

GEOMETRIA

1. Vektorok	1
1.1. Irányított szakaszok. Vektorok	1
1.2. Műveletek vektorokkal	2
1.3. Kollineáris vektorok	5
1.4. Helyzetvektor	6
1.5. Párhuzamosság, összefutás, kollinearitás	7
1.6. Skaláris szorzás	10
2. Analitikus geometria	13
3. Trigonometria	19
3.1. A trigonometria elemei	19
3.2. Trigonometrikus egyenletek	24
3.3. Trigonometria síkmértani alkalmazásai	28

MATEMATIKAI ANALÍZIS

1. Valós számok, valós számhalmazok	30
2. Valós számsorozatok	32
2.1. Valós sorozatok	32
2.2. Műveletek valós sorozatokkal	33
2.3. Egyenlőtlenségek és határértékek	35
2.4. Konvergencia, monotonitás, korlátosság	36
2.5. Részsorozatok	37
2.6. Néhány fontos határérték	37
2.7. Határozatlansági esetek feloldása	38
3. Függvényhatárértékek	40
3.1. Függvény határértéke	40
3.2. Határértékekkel végzett műveletek	42
3.3. Határértékek tulajdonságai	43

3.4. Fontos határértékek	44
4. Folytonos függvények	46
4.1. A folytonosság értelmezése	46
4.2. Műveletek folytonos függvényekkel	48
4.3. Folytonosság és Darboux tulajdonság	49
5. Deriválható függvények	50
5.1. A derivált értelmezése	50
5.2. A derivált mértani jelentése	52
5.3. Műveletek deriválható függvényekkel	53
5.4. Elemi függvények deriváltjai	54
5.5. Összetett függvény deriváltja	55
5.6. Magasabb rendű deriváltak	56
5.7. A differenciálszámítás középértéktételei	57
5.7.1. A Fermat-tétel	57
5.7.2. A Rolle-tétel és a Rolle-sorozat	58
5.7.3. A Lagrange-tétel	60
5.7.4. A L'Hospital-szabály	62
5.8. Függvény grafikus képe	63
5.8.1. Aszimptoták	63
5.8.2. Konvexitás és konkavitás	65
5.8.3. Függvény ábrázolása	66
6. A határozatlan integrál	68
6.1. Primitív függvény. A határozatlan integrál	68
6.2. Primitiválható függvények	70
6.3. A parciális integrálás módszere	72
6.4. Első helyettesítési módszer	73
6.5. Második helyettesítési módszer	75
6.6. Törtfüggvények integrálása	76
6.6.1. Az Euler-helyettesítések	80
6.6.2. Trigonometrikus függvények integrálása	81
7. A határozott integrál	82
7.1. Riemann-integrálható függvények	82
7.2. Integrálható függvények tulajdonságai	85
7.3. A parciális integrálás módszere	86
7.4. Első helyettesítési módszer	87
7.5. Második helyettesítési módszer	88
7.6. Középértéktételek	89
7.7. Az integrálszámítás alaptétele	90
7.8. A határozott integrál alkalmazásai	91

Tárgymutató

- abszcissza, 13
- aszimptota
 - függőleges, 63
 - ferde, 63
 - vízszintes, 63
- áthajlási pont, 65
- Bernoulli-egyenlőtlenség, 58
- Cesaro tétele, 37
- Darboux-tulajdonságú függvény, 49
- derékszögű koordináta-rendszer, 13
- derivált
 - bal oldali, 50
 - jobb oldali, 50
 - magasabb rendű, 56
 - pontbeli derivált, 50
- Descartes-féle koordináta-rendszer, 13
- e , 36
- egyenes
 - általános egyenlete, 16
 - explicit egyenlete, 16
 - iránytényezője, 15
- első helyettesítési módszer, 73, 87
- Euler-egyenes, 8
- Euler-helyettesítések, 80
- függvény
 - halmazon deriválható, 50
 - pontban deriválható, 50
 - primitiválható, 68
 - Riemann-integrálható, 83
- függvény határértéke, 40
 - bal oldali, 41
 - jobb oldali, 41
- féltengely, 13
- Fermat tétele, 57
- fogó-tétel, 43
- folytonos függvény
 - balról folytonos, 46
 - halmazon folytonos függvény, 46
 - jobbról folytonos, 46
 - pontbeli folytonosság, 46
- forgástest, 93
 - térfogata, 93
- Héron-képlet, 29
- halmaz
 - alsó határ, 30
 - alsó korlát, 30
 - alulról korlátos, 30
 - felülről korlátos, 30
 - felső határ, 30
 - felső korlát, 30
 - infimum, 30
 - szuprémum, 30
 - véges halmaz, 30
- határozatlan integrál, 68
- határozott integrál, 83
- helyzetvektor, 6
 - adott szakaszt adott arányban osztó pont helyzetvektora, 6

háromszög súlypontjának helyzetvektora, 6

háromszögbe írt kör középpontjának helyzetvektora, 7

szakasz felezőpontjának helyzetvektora, 6

inflexiós pont, 65

intervallum felosztása, 82

 egyenközű, 82

 felosztás normája, 82

 közbeeső pontrendszer, 82

 osztópontok, 82

irányított szakasz, 1

 ekvipolens, 1

izolált pont, 31

környezet, 31

koszinusz, 19

koszinusz-tétel, 29

kotangens, 20

kotangens-tengely, 20

L'Hospital szabály, 62

Lagrange tétele, 60

lokális maximumpont, 57

lokális minimumpont, 57

lokális szélsőértékpont, 57

második helyettesítési módszer, 75, 88

oldalfelező hossza, 12

ordináta, 13

origó, 6, 13

parciális integrálás, 72, 86

π , 19

primitív függvény, 68

részsorozat, 37

radián, 19

Riemann-összeg, 82

Rolle tétele, 58

Rolle-sorozat, 59

sorozat, 32

 csökkenő, 32

 divergens, 32

 konvergens, 32

 korlátos, 32

 növekvő, 32

 periodikus, 32

sorozat határértéke, 32

 összeg-sorozat határértéke, 33

 hányados-sorozat határértéke, 33

 szorzat-sorozat határértéke, 33

sorozatok

 összege, 33

 hányadosa, 33

 szorzata, 33

stacionárius pont, 57

szögfelező hossza, 12

szögpont, 51

szakadási pont, 47

 elsőfajú, 47

 másodfajú, 47

 megszüntethető, 47

szinusz, 19

szinusz-tétel, 29

szubgrafikon, 92

 területe, 92

tétel

 Ceva tétele, 9

 koszinusz-tétel, 12

 Meneláosz tétele, 9

 Papposz tétele, 6

 Stewart tétele, 12

 szögfelező tétele, 7

 Thálész tétele, 7

 fordítottja, 7

tangens, 20

tangens-tétel, 29

tangens-tengely, 20
torlódási pont, 31
trigonometria alapképlete, 21
trigonometrikus kör, 19

univerzális helyettesítés, 81

vektor, 1

- azonos állású vektorok, 5
- ellentétes vektor, 3
- hossza, 1
- modulusza, 1
- nullvektor, 1
- reprezentánsa, 1
- skaláris négyzete, 11

vektorok

- összeadása, 2
- egyenlősége, 2
- különbsége, 3
- kollineáris vektorok, 5
- merőleges vektorok, 10
- skaláris szorzata, 10
- szöge, 10

visszatérési pont, 51

Weierstrass tétele, 36

1. Vektorok

1.1. Irányított szakaszok. Vektorok

Irányított szakaszok

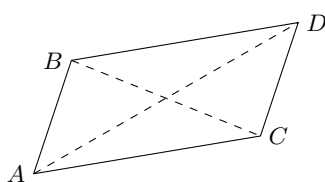
Értelmezés. Az (A, B) rendezett pontpárt **irányított szakasznak** nevezzük és így jelöljük: \overline{AB} .

Értelmezés. Az \overline{AB} és \overline{CD} irányított szakaszokat **ekvipolenseknek** nevezzük (jelölés: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$), ha az $[AD]$ és $[BC]$ szakaszok felezőpontjai egybeesnek.

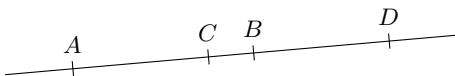
Megjegyzés. Ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor az \overline{AB} szakaszt párhuzamos eltolással a \overline{CD} szakaszra lehet helyezni.

Tulajdonság. Az irányított szakaszok halmazán az ekvipolencia egy **ekvivalencia-reláció**, azaz

- $\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (reflexív),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor $\overline{CD} \sim \overline{AB}$ (szimmetrikus),
- ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ és $\overline{CD} \sim \overline{EF}$, akkor $\overline{AB} \sim \overline{EF}$ (transzitiv).



\overline{AB} és \overline{CD} pontosan akkor ekvipolensek, ha $ABDC$ egy paralelogramma vagy az A, B, C, D pontok kollineárisak és az $[AD]$, $[BC]$ felezőpontja megegyezik.



Vektorok

Értelmezés. Egy adott irányított szakasszal ekvipolens irányított szakaszok halmazát **vektornak** nevezzük.

Jelölés. Az \overline{AB} irányított szakasz által meghatározott vektort \overrightarrow{AB} -vel (vagy egy kisbetűvel) jelöljük:

$$\overrightarrow{AB} = \{\overline{CD} \mid \overline{CD} \sim \overline{AB}\}.$$

Megjegyzés. Ha $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, akkor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Az $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ jelöléssel az \overline{AB} (vagy a \overline{CD}) az \vec{u} egy **reprezentánsa**.

Értelmezés. Az \vec{u} **hossza (modulusza)** az őt reprezentáló irányított szakaszok közös hosszával egyenlő és $|\vec{u}|$ -val jelöljük.

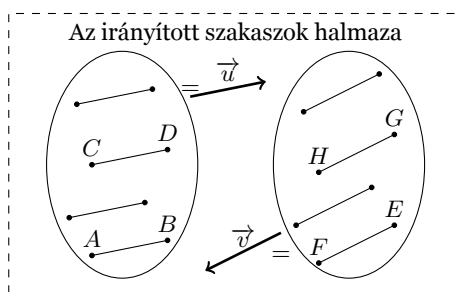
Értelmezés. A nulla hosszúságú \overrightarrow{AA} vektort **nullvektornak** nevezzük.

Értelmezés. Az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{CD} vektorok **egyenlőek** (jelölés: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), ha az \overline{AB} és \overline{CD} irányított szakaszok ekvipolensek.

Megjegyzés. Két vektor akkor egyenlő, ha irányuk megegyezik (tartóegyeneseik párhuzamosak), hosszuk egyenlő és ugyanaz az irányításuk.

Tétel. (Adott kezdőpontú reprezentáns létezése) Ha adott az \vec{u} vektor és egy tetszőleges M pont, akkor létezik egyetlen olyan M' pont, amelyre $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

Következmény. Az egyértelműség alapján, ha $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, akkor $A = B$.



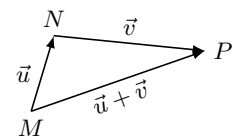
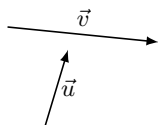
A mellékelt ábrán
 $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \dots$,
 $\vec{v} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \dots$,
 \overline{CD} az \vec{u} egy reprezentánsa,
 \overline{EF} a \vec{v} egy reprezentánsa,
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

1.2. Műveletek vektorokkal

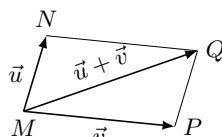
Vektorok összeadása

Az \vec{u} és \vec{v} vektorok **összegét** a következőképpen szerkesztjük meg.

- (**Háromszög-szabály**): egy tetszőleges M pontból kiindulva megszerkesztjük az $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ majd az $\overrightarrow{NP} = \vec{v}$ vektorokat. Ekkor az \vec{u} és \vec{v} összege az $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MP}$ vektor.
- (**Parallelogramma-szabály**): ha \vec{u} és \vec{v} nem kollineárisak, egy tetszőleges M pontból kiindulva megszerkesztjük az $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ és az $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$ vektorokat, majd az $MNPQ$ paralelogrammát. Ekkor az \vec{u} és \vec{v} összege az $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MQ}$ vektor.



Háromszög-szabály



Parallelogramma-szabály

A vektorok összeadásának tulajdonságai

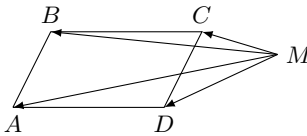
Értelmezés. Az \overrightarrow{AB} vektor **ellentétes vektora** a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ vektor.

Tulajdonság. A vektorok összeadásának tulajdonságai (\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tetszőleges vektorok):

- *asszociatív:* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- *kommutatív:* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- a nullvektor ($\vec{0}$) az összeadás *semleges eleme:* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
- minden \vec{a} vektornak van ellentettje ($-\vec{a}$): $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ paralelogramma síkjának bármely M pontja esetén $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

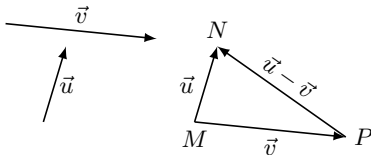
M. Az $ABCD$ paralelogrammában $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \\ &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}. \end{aligned}$$

Vektorok kivonása

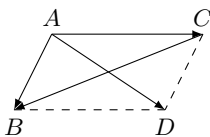
Az \vec{u} és \vec{v} vektorok **különbségén** az $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ vektort értjük és a következőképpen szerkesztjük meg: egy tetszőleges M pontból kiindulva felvesszük az $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ és $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$ vektorokat. Ekkor $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{PN}$.



Tetszőleges M, N, P pontok esetén $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$.

Feladat. Az ABC háromszögben az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektorok modulusza egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

M. Az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ megszerkesztése érdekében megrajzoljuk az $ABDC$ paralelogrammát: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, így $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$.



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, így $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB$.
 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Rightarrow AD = BC$, vagyis az $ABCD$ paralelogramma egy téglalap. Tehát $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$.

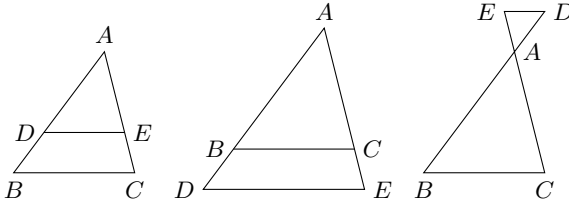
1.5. Párhuzamosság, összefutás, kollinearitás

Tétel. Legyen A, B, C, D négy nem kollineáris pont. Az AB és CD egyenesek pontosan akkor párhuzamosak, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{CD}$.

Tétel. (Thálész tétele) Az ABC háromszög valamely oldalával húzott párhuzamos a másik két oldalon arányos szakaszokat határoz meg: ha $DE \parallel BC$, $D \in AB$, $E \in AC$, akkor $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Következmény. A tétel feltételei mellett $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$.

Tétel. (Thálész tételének fordítottja) Ha a D és E pontok az ABC háromszög AB és AC oldalát arányos szakaszokra osztják, akkor $DE \parallel BC$.



A háromszög szögfelezőinek tulajdonságai

Tétel. (Szögfelező tétele) Ha $(AD$ az ABC háromszög \widehat{BAC} szögének szögfelezője, $D \in (BC)$, akkor $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Tétel. A háromszögbe írt kör középpontja a háromszög szögfelezőinek I metszéspontja.

Tétel. Ha O a sík egy tetszőleges pontja, a háromszögbe írt kör középpontjának helyzetvektorát az $\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}$ képlet adja meg, ahol $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Kollinearitás

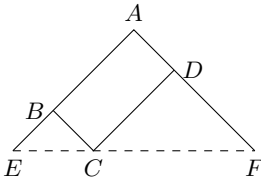
Tétel. Az A, B, C pontok pontosan akkor helyezkednek el egy egyenesen, ha létezik olyan α valós szám, amelyre $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$.

Tétel. Az A, B, C pontok pontosan akkor helyezkednek el egy egyenesen, ha létezik olyan α valós szám, amelyre bármely O pont esetén

$$\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}.$$

Feladat. Az $ABCD$ paralelogramma oldalain vegyük fel az E és F pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$. Igazoljuk, hogy C, E, F kollineárisak.

M. Az $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ feltétel alapján $\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{EB}$ (lásd az ábrát), így E az \overrightarrow{AB} irányított szakaszt $\lambda = 3$ arányban osztja. Kezdőpontnak a C pontot választva, a helyzetvektor képlete alapján $\overrightarrow{CE} = \frac{\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}}{1 - 3} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CB}}{-2} = \frac{2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}}{2}$.



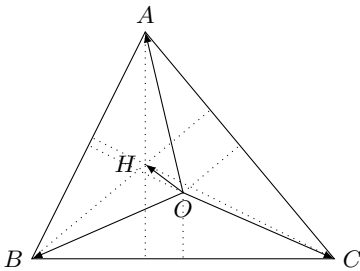
Hasonlóan, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{FA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FD}$, azaz F az \overrightarrow{AD} irányított szakaszt $\lambda = \frac{3}{2}$ arányban osztja.

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}}{1 - \frac{3}{2}} = -2 \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \right) = \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{CB} = -2 \cdot \frac{2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}}{2} = -2\overrightarrow{CE}, \text{ azaz } E, C, F \text{ kollineárisak.}$$

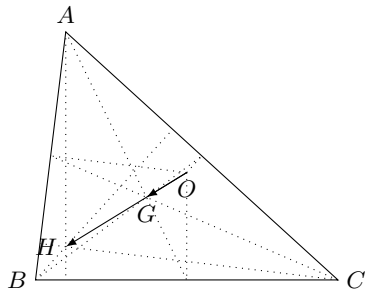
Az ABC háromszögben jelölje O a háromszög köré írt kör középpontját, G a háromszög súlypontját, H a háromszög magasságpontját (a magasságvonalak metszéspontját).

Tétel. (Sylvester tétele) Az ABC háromszögben $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Tétel. Az ABC háromszögben az O, G, H pontok egy egyenesen helyezkednek el, melynek neve a **háromszög Euler-egyense** és $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.



Sylvester tétele



2. Analitikus geometria

Derékszögű koordináta-rendszer

A síkban tekintsük az egymásra merőleges xx' és yy' egyeneseket, amelyek az O pontban metszik egymást és amelyeken kijelöltünk egy-egy pozitív irányt.

Értelmezés. Az (xOx', yOy') rendszert **derékszögű koordináta-rendszernek** vagy **Descartes-féle koordináta-rendszernek** nevezzük. Az O pont neve **origó**. Az $[Ox, [Oy$ félegyenesek a **pozitív féltengelyek**, $[Ox', [Oy'$ a **negatív féltengelyek**.

Jelölés. Az (xOx', yOy') koordináta-rendszert (xOy) -nal jelöljük. Az $[Ox$ illetve az $[Oy$ féltengelyek egységvektorait \vec{i}, \vec{j} -vel jelöljük.

Descartes-féle koordináták

Legyen M egy tetszőleges pont az xOy koordináta-rendszer síkjában. Jelölje x_M az M pontnak az Ox -tengelyre eső vetületének koordinátáját, y_M az M pontnak az Oy -tengelyre eső vetületének koordinátáját.

Értelmezés. Az x_M számot az M pont **abszcisszájának**, az y_M pontot az M **ordinátájának** nevezzük. Az (x_M, y_M) számpárt az M **koordinátáinak** nevezzük.

Ezzel egyenértékű a következő értelmezés.

Értelmezés. Az M pont $\vec{r}_M = \vec{OM}$ helyvektorát az \vec{i} és \vec{j} vektorok szerint felbontva $\vec{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j}$, ahol $x_M, y_M \in \mathbb{R}$. Az (x_M, y_M) számpárt az M pont **koordinátáinak** nevezzük.

Jelölés. Ez utóbbi értelmezés alapján (formálisan) $\vec{r}_M = (x_M, y_M)$.

Két pont távolsága

Az $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontok távolságát a

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

képlet adja meg.

Feladat. Határozzuk meg az AOB háromszög területét, ahol $A(3, 4)$ és $B(12, 5)$.

M. $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $OB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, $AB = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{82}$, így $K_{AOB\Delta} = 18 + \sqrt{82}$.

Feladat. Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy az $A(2; m)$ és $B(m; -2)$ pontok távolsága 4 legyen!

M. $AB = \sqrt{(m-2)^2 + (-2-m)^2} = 4 \Leftrightarrow 2m^2 + 8 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2.$

Műveletek kötött vektorokkal

Legyen $\vec{u} = (a_1, b_1)$ és $\vec{v} = (a_2, b_2)$ két vektor és λ egy valós szám.

Tulajdonság. (Két vektor egyenlősége) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \text{ és } b_1 = b_2).$

Tulajdonság. (Két vektor összege) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$

Tulajdonság. (Vektor szorzata valós számmal) $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot b_1).$

Tulajdonság. (Két vektor skaláris szorzata) $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \in \mathbb{R}.$

Tulajdonság. Az \vec{u} vektor hossza $\|\vec{u}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$

Következmény. Két vektor skaláris szorzatának értelmezéséből

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Következmény. \vec{u} pontosan akkor merőleges \vec{v} -re, ha $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$

Tétel. Az \vec{u} és \vec{v} vektorok pontosan akkor párhuzamosak, ha $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$
 $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0$ vagy $a_1 = a_2 = 0$ vagy $b_1 = b_2 = 0.$

Feladat. Adottak az $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ és $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ vektorok. Határozzuk meg a $p, r \in \mathbb{R}$ számokat úgy, hogy fennálljon az $\vec{u} = p\vec{a} + r\vec{b}$ egyenlőség!

M. $\vec{a} = (1, 1), \vec{b} = (1, -1), \vec{u} = (6, 2).$ $p\vec{a} + r\vec{b} = p \cdot (1, 1) + r \cdot (1, -1) = (p, p) + (r, -r) = (p+r, p-r) = (6, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} p+r = 6 \\ p-r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow p = 4, r = 2.$

Feladat. Számítsuk ki: $(2\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j}).$

M. A skaláris szorzás értelmezéséből $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{i}}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1,$
 $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0,$ így
 $(2\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j}) = 6\vec{i}^2 - 8\vec{i} \cdot \vec{j} + 15\vec{j} \cdot \vec{i} - 20\vec{j}^2 = 6 - 20 = -14.$

Másképp: formálisan írhatjuk, hogy

$$(2\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j}) = (2, 5) \cdot (3, -4) = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = -14.$$

Feladat. Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ azon értékét, amelyre az $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ és $\vec{v} = 4\vec{i} + (2m-1)\vec{j}$ vektorok merőlegesek egymásra!

M. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 + (-5) \cdot (2m-1) = 0 \Leftrightarrow 8 - 10m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{10}.$

Feladat. Igazoljuk, hogy az $\vec{u} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ és $\vec{v} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$ vektorok tompaszögűt zárnak be.

M. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4, -5) \cdot (3, 7) = 12 - 35 = -23 < 0,$ így a két vektor által bezárt szög

koszinusza negatív, azaz a szög tompaszög.

Feladat. Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ és $\vec{v} = 4\vec{i} + (a+4)\vec{j}$ vektorok párhuzamosak legyenek!

M. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{a+4} \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2, a_2 = -6.$

Feladat. Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $O(0,0)$, $A(2,1)$ és $B(-2,1)$ pontok. Határozzuk meg az \vec{OA} és \vec{OB} vektorok által bezárt szög koszinuszát!

M. $\vec{OA} = (2,1), \vec{OB} = (-2,1), \|\vec{OA}\| = \sqrt{5}, \|\vec{OB}\| = \sqrt{5}; \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3 \Leftrightarrow \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \cos(\widehat{AOB}) = -3 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\widehat{AOB}) = -3 \Leftrightarrow \cos(\widehat{AOB}) = -\frac{3}{5}.$

Legyen $\vec{r}_A = (x_A, y_A), \vec{r}_B = (x_B, y_B), \vec{r}_C = (x_C, y_C).$

Tétel. Az \vec{AB} vektor koordinátái $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$

Tétel. Ha $M \in (AB)$ úgy, hogy $\vec{MA} = k \cdot \vec{MB}$, akkor

$$x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \text{ és } y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k}.$$

Következmény. Az $[AB]$ szakasz M felezőpontjának koordinátái

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Következmény. Az ABC háromszög G súlypontjának koordinátái

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right).$$

Feladat. Legyen G az ABC háromszög súlypontja. Az A, B és G helyzetvektorai $\vec{r}_A = 4\vec{i} + 7\vec{j}, \vec{r}_B = 2\vec{i} - \vec{j}$ és $\vec{r}_G = 4\vec{i} + 4\vec{j}$. Határozzuk meg a C pont helyzetvektorát!

M. $(4,4) = \left(\frac{4+2+x_C}{3}, \frac{7-1+y_C}{3} \right) \Leftrightarrow x_C = 6, y_C = 6 \Leftrightarrow C(6,6).$

Egyenes irányítványozója

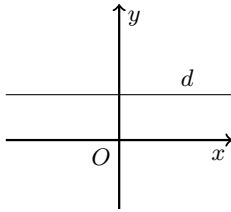
Értelmezés. Legyen d egy egyenes, mely nem párhuzamos az Oy -tengellyel. A d egyenes **irányítványozója** a d -nek az Ox -tengellyel bezárt szögének tangense: $m = \operatorname{tg} \varphi$, ahol $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ] \setminus \{90^\circ\}$ (az Oy -nal párhuzamos egyeneseknek nincs irányítványozójuk).

Tétel. Az $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontokon átmenő egyenes irányítványozója

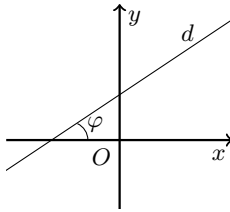
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

Tétel. A $d: ax + by + c = 0, b \neq 0$ egyenletű egyenes irányítványozója $m_d = -\frac{a}{b}$.

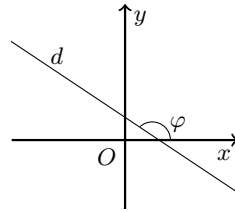
Tétel. Az $y = mx + n$ egyenletű egyenes irányítványozója m .



$$\varphi = 0^\circ, m = 0$$



$$\varphi \in (0^\circ, 90^\circ), m > 0$$



$$\varphi \in (90^\circ, 180^\circ), m < 0$$

Két egyenes szöge

Legyen m_1 a d_1 , m_2 a d_2 egyenes irányítványozója ($d_1 \not\parallel Oy$, $d_2 \not\parallel Oy$).

Tétel. A d_1 és d_2 egyenesek akkor és csakis akkor párhuzamosak, ha $m_1 = m_2$.

Tétel. A d_1 és d_2 egyenesek akkor és csakis akkor merőlegesek, ha $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Tétel. A d_1 és d_2 egyenesek által bezárt szög tangense

$$\operatorname{tg}(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}.$$

Egyenes egyenlete

Értelmezés. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ vagy $b \neq 0$. Azon (x, y) koordinátájú pontok, amelyekre $ax + by + c = 0$, egy d egyenesen helyezkednek el, melyet az $ax + by + c = 0$ egyenletű egyenesnek nevezünk és így jelölünk: $d: ax + by + c = 0$ (egyenes **általános egyenlete**).

Tétel. Az Oy -tengelyt a $(0, n)$ pontban metsző, m irányítványozójú egyenes egyenlete $y = mx + n$ (egyenes **explicit egyenlete**).

Tétel. Az $A(x_A, y_A)$ ponton áthaladó és m irányítványozójú egyenes egyenlete $y - y_A = m(x - x_A)$.

Tétel. Az $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ha $x_A \neq x_B$ és $x = x_A$, ha $x_A = x_B$.

Megjegyzés. A fenti összefüggés $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$ alakba is írható.

Következmény. Azon egyenes egyenlete, amely a tengelyeket az $(a, 0)$ és $(0, b)$ pontokban metszi, $(a, b \neq 0)$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$.

3. Trigonometria

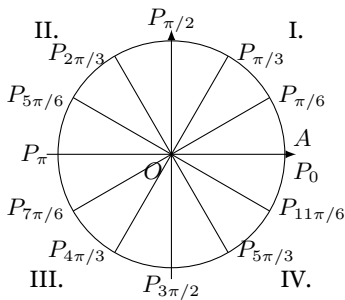
3.1. A trigonometria elemei

Szög-mértékegységek

Értelmezés. Egy kör félkerületének és sugarának aránya állandó és $\pi \approx 3,1415$ -tel egyenlő.

Értelmezés. A kör sugarával megegyező hosszúságú körívhez tartozó középponti szög mértéke 1 **radián**.

Megjegyzés. Egy szögnek fokban illetve radiánban való mértéke közt fennáll az $\frac{\alpha}{x_r} = \frac{180}{\pi}$ összefüggés, ahol α a szög fokban kifejezett, x_r a szög radiánban kifejezett mértéke.



A trigonometrikus kör

Értelmezés. Adott egy xOy derékszögű koordináta-rendszer. Az O középpontú, egységsugarú kört, amelyen kijelöltünk egy pozitív körbejárási irányt (az óramutató járásával ellentétes irányt), **trigonometrikus körnek** nevezzük.

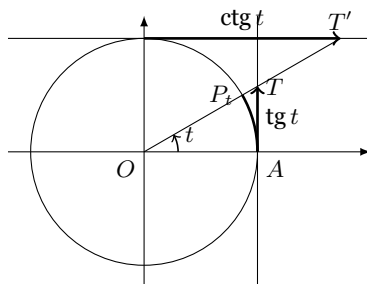
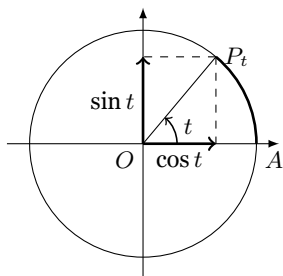
Jelölés. Legyen $t \in \mathbb{R}$ egy szám. Ekkor egyetlen olyan P_t -vel jelölt pont van a trigonometriai körön, amely $m(\widehat{AOP_t}) = t$.

Szinusz és koszinusz

Legyen t egy valós szám és P_t a hozzátartozó pont a körön.

Értelmezés. A P_t pont ordinátáját a t valós szám **szinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\sin t$.

Értelmezés. A P_t pont abszcisszáját a t valós szám **koszinuszának** nevezzük és így jelöljük: $\cos t$.



Tangens és kotangens

Értelmezés. Az $x = 1$ egyenletű függőleges egyenest **tangens-tengelynek**, az $y = 1$ egyenletű vízszintes egyenest pedig **kotangens-tengelynek** nevezzük.

Értelmezés. Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, P_t a t -nek megfelelő pont és T az OP_t egyenes és a tangens-tengely metszéspontja, akkor T ordinátáját **t tangensének** nevezzük és így jelöljük: $\operatorname{tg} t$.

Értelmezés. Ha $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, P_t a t -nek megfelelő pont és T' az OP_t egyenes és a kotangens-tengely metszéspontja, akkor T' abszcisszáját **t kotangensének** nevezzük és így jelöljük: $\operatorname{ctg} t$.

Fontosabb értékek

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

Visszavezetés az első negyedbe

$x \in N_2$	$x \in N_3$	$x \in N_4$
$\sin x = \sin(\pi - x)$	$\sin x = -\sin(x - \pi)$	$\sin x = -\sin(2\pi - x)$
$\cos x = -\cos(\pi - x)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$	$\cos x = \cos(2\pi - x)$
$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$	$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - \pi)$	$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(2\pi - x)$
$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(\pi - x)$	$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x - \pi)$	$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(2\pi - x)$

A trigonometrikus függvények előjele

x	0	N_1	$\frac{\pi}{2}$	N_2	π	N_3	$\frac{3\pi}{2}$	N_4	2π
$\sin x$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$\cos x$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
$\operatorname{tg} x$	0	+	+ -	-	0	+	+ -	-	0
$\operatorname{ctg} x$	+	+	0	-	- +	+	0	-	-

A trigonometrikus függvények monotonitása

x	0	N_1	$\frac{\pi}{2}$	N_2	π	N_3	$\frac{3\pi}{2}$	N_4	2π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\operatorname{tg} x$	0	↗	$+\infty$ - ∞	↗	0	↗	$+\infty$ - ∞	↗	0
$\operatorname{ctg} x$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

Alapösszefüggések

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (<i>a trigonometria alapképlete</i>)	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
	$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
	$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

3. Függvényhatárértékek

3.1. Függvény határértéke

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ függvény **határértéke** az $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontban $l \in \overline{\mathbb{R}}$, ha az l bármely V_l környezete esetén létezik az x_0 olyan U_{x_0} környezete, amelyre $\forall x \in U_{x_0}^* \cap D$ esetén $f(x) \in V_l$.

Jelölés. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke az $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pontban $l \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor ezt így jelöljük: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Tétel. (A határérték Heine féle értelmzése) Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Egyenértékűek a következő állítások:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$,
- $\forall (x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ sorozat $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Feladat. Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ függvénynek nincs határértéke az $x_0 = 0$ pontban!

M. Tekintsük az $(x_n)_{n \geq 1}$ és $(x'_n)_{n \geq 1}$ sorozatokat, ahol $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$.

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1,$$

így f -nek nincs határértéke 0-ban.

Határérték az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $f(x) > \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$ akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Feladat. Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = \infty$!

M. Igazoljuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$ úgy, hogy ha $|x| < \delta, x \neq 0$, akkor $f(x) > \varepsilon$.

$$f(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x^2 - x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1 - \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \frac{1 + \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right).$$

A $\delta = \min \left\{ \left| \frac{1 - \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right|, \left| \frac{1 + \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right| \right\}$ választással tehát $|x| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.

Határérték $+\infty$ -ben

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$ akkor $f(x) > \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x > \delta(\varepsilon)$, akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Határérték $-\infty$ -ben

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x < -\delta(\varepsilon)$ akkor $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x < -\delta(\varepsilon)$ akkor $f(x) > \varepsilon$.

Értelmezés. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $x < -\delta(\varepsilon)$, akkor $f(x) < -\varepsilon$.

Jobb és bal oldali határérték

Értelmezés. Azt mondjuk, hogy az $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ függvény **bal oldali határértéke** az $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ torlódási pontban $l \in \bar{\mathbb{R}}$, ha az l bármely V_l környezete esetén létezik az x_0 olyan $U_{x_0}^*$ környezete, amelyre $\forall x \in U_{x_0}^* \cap D, x < x_0$ esetén $f(x) \in V_l$.

Jelölés. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ vagy $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$.

Tétel. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \Leftrightarrow$

$\forall (x_n)_{n \geq 1}, x_n \in D, x_n < x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ sorozat esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Megjegyzés. Hasonlóan értelmezhető a jobb oldali határérték is.

Tétel. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a D halmaz x_0 torlódási pontjában akkor és csakis akkor van határértéke, ha van bal és jobb oldali határértéke és ezek egyenlők.

3.2. Határértékekkel végzett műveletek

Összeg, szorzat határértéke

Tétel. Ha az f, g függvényeknek van határértéke x_0 -ban és a határértékek összege illetve szorzata értelmezett, akkor az $f + g$ illetve $f \cdot g$ függvénynek is van határértéke x_0 -ban és

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).\end{aligned}$$

Határozatlan esetek: $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$, illetve $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$.

Hányados határértéke

Tétel. Ha az f, g függvényeknek van határértéke x_0 -ban és a határértékek hányadosa értelmezett, akkor az $\frac{f}{g}$ függvénynek is van határértéke x_0 -ban és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Határozatlan esetek: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Hatvány határértéke

Tétel. Ha az f, g függvényeknek van határértéke x_0 -ban és a határértékek hatványa értelmezett, akkor az f^g függvénynek is van határértéke x_0 -ban és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Határozatlan esetek: 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

Összetett függvény határértéke

Tétel. Ha $g : D \rightarrow E$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 a D torlódási pontja, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_0$, $g(x) \neq l_0$, ha $x \neq x_0$ és $\lim_{u \rightarrow l_0} f(u) = l$, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke x_0 -ban és $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = l$.

Példa. Ha $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, akkor $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \sin f(x) = \sin \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sin l$.

5.4. Elemi függvények deriváltjai

A függvény	A függvény deriváltja	Deriválhatósági tartomány
$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ax^{a-1}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \log_a x, \begin{matrix} a > 0, \\ a \neq 1 \end{matrix}$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
$f(x) = a^x, \begin{matrix} a > 0, \\ a \neq 1 \end{matrix}$	$f'(x) = a^x \ln a$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
$f(x) = \operatorname{arccctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}